

**PROGRÈS RÉCENTS SUR LA CONJECTURE DE ZAGIER
ET LE PROGRAMME DE GONCHAROV**
[d'après Goncharov, Rudenko, Gangl, ...]

par Clément Dupont

INTRODUCTION

La fonction zêta d'un corps de nombres F (extension finie du corps des rationnels) a été définie par Dedekind sous la forme

$$\zeta_F(s) = \sum_{\mathfrak{a}} N(\mathfrak{a})^{-s} \quad (s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > 1) ,$$

où la somme porte sur les idéaux non nuls de l'anneau des entiers \mathcal{O}_F , et $N(\mathfrak{a}) = |\mathcal{O}_F/\mathfrak{a}|$ est la norme. C'est un invariant arithmétique fondamental d'un corps de nombres, qui généralise la fonction zêta de Riemann $\zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \zeta(s)$. ZAGIER (1986, 1991) a conjecturé que la valeur spéciale $\zeta_F(n)$, pour un entier $n \geq 2$, s'exprime de manière précise en termes d'évaluations en des éléments de F du n -ème polylogarithme classique

$$\operatorname{Li}_n(z) = \sum_{k \geq 1} \frac{z^k}{k^n} \quad (z \in \mathbb{C}, |z| < 1) .$$

Cette conjecture vise à généraliser la formule analytique du nombre de classes, qui exprime le résidu de la fonction zêta en $s = 1$ en termes de logarithmes d'unités.

Les travaux fondateurs de BOREL (1974, 1977) sur la cohomologie du groupe linéaire permettent de relier $\zeta_F(n)$ au covolume d'un groupe de K -théorie de F à l'intérieur d'un espace euclidien via le *régulateur*

$$K_{2n-1}(F) \longrightarrow \mathbb{R}^{d_n} ,$$

pour un entier d_n qui dépend de F , défini plus bas par (7). La conjecture de Zagier devient alors un énoncé en K -théorie : il s'agit de produire un cocycle explicite, exprimé grâce à la fonction Li_n , pour la classe de cohomologie du groupe linéaire qui donne naissance au régulateur. Concrètement, cela consiste à découvrir et organiser les équations fonctionnelles des polylogarithmes, ce qui revient souvent à des considérations non triviales de géométrie projective élémentaire. Après la preuve par Zagier du cas $n = 2$

de la conjecture⁽¹⁾, cette stratégie a permis à GONCHAROV (1991, 1994, 1995a,b) de prouver le cas $n = 3$. On renvoie aux exposés à ce séminaire d'OESTERLÉ (1993) et de CATHELIN (1993) pour des comptes rendus de ces résultats. Des obstructions nouvelles apparaissent pour $n = 4$, ce qui explique qu'il ait fallu attendre une vingtaine d'années de plus pour voir une preuve de ce cas de la conjecture de Zagier, par GONCHAROV et RUDENKO (2018). Le premier objectif de ce texte est de décrire les enjeux et les grandes lignes de cette preuve.

Afin de comprendre la nécessité d'ingrédients supplémentaires dans le cas $n \geq 4$, un point de vue motivique sur la conjecture de Zagier est utile. La philosophie des motifs, due à Grothendieck, est celle d'une catégorie qui serait le réceptacle d'une théorie de cohomologie universelle pour les variétés algébriques (concentrant en un objet les groupes de cohomologie singulière, de de Rham, ℓ -adique, etc.) et où les morphismes seraient liés aux cycles algébriques. Dans la vision de BEILINSON (1985) et DELIGNE (1985), le régulateur devrait être induit par la réalisation de Hodge au niveau des groupes d'extensions via la formule

$$(1) \quad \text{Ext}_{\text{MT}(F)}^1(\mathbb{Q}(-n), \mathbb{Q}(0)) \simeq K_{2n-1}(F)_{\mathbb{Q}}.$$

On a noté $\text{MT}(F)$ la catégorie tannakienne des motifs de Tate mixtes sur F , qui existe inconditionnellement grâce aux résultats de Borel et aux travaux de VOEVODSKY (2000) et LEVINE (1993), et pour laquelle la formule ci-dessus est vérifiée. Dans ce cadre, la conjecture de Zagier affirme que les extensions (1) proviennent toutes de certains motifs « polylogarithmiques », dont les $\text{Li}_n(z)$ sont des périodes.

Pour $n \leq 3$ la situation est particulièrement favorable, puisqu'on s'attend à ce que tous les motifs qui sont des extensions itérées de $\mathbb{Q}(0)$, $\mathbb{Q}(-1)$, $\mathbb{Q}(-2)$, $\mathbb{Q}(-3)$ proviennent de motifs polylogarithmiques. Pour $n \geq 4$ ce n'est plus le cas et de nouveaux motifs doivent être pris en compte, associés aux polylogarithmes *multiples*

$$\text{Li}_{n_1, \dots, n_r}(z_1, \dots, z_r) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_r} \frac{z_1^{k_1} \dots z_r^{k_r}}{k_1^{n_1} \dots k_r^{n_r}}.$$

Le problème devient beaucoup plus subtil : du point de vue des périodes, il faut montrer que *certaines* combinaisons linéaires spéciales de polylogarithmes multiples — celles qui sont des périodes d'extensions (1) — s'expriment en termes de polylogarithmes classiques. Dans cette direction, GANGL (2016) a apporté une contribution cruciale en démontrant une équation fonctionnelle, prévue par Goncharov, reliant $\text{Li}_{3,1}$ et Li_4 . Celle-ci a été redécouverte par GONCHAROV et RUDENKO (2018) qui l'incorporent à un contexte général, inspiré par les travaux de FOCK et GONCHAROV (2009) sur le dilogarithme, où la structure des polylogarithmes multiples est organisée par la combinatoire des structures amassées. La structure opéradique des dissections de polygones

1. ZAGIER (1986) a découvert et prouvé une version faible du cas $n = 2$ de la conjecture par des méthodes de géométrie hyperbolique. La preuve de la version forte, qu'on peut trouver chez GONCHAROV (1995a), est un assemblage de résultats dûs à BLOCH (1977, 1978), DUPONT et SAH (1982), DUPONT (1987), et SUSLIN (1990).

joue notamment un rôle central, en lien avec le formalisme des corrélateurs, qui sont des variantes des polylogarithmes multiples introduites par GONCHAROV (2019).

Au vu de la discussion précédente, les résultats dont il sera question dans ce texte s’inscrivent dans une stratégie vers la conjecture de Zagier découpée en deux étapes distinctes et relativement indépendantes :

- 1) La première étape consiste à démontrer une conjecture de Zagier « faible »⁽²⁾ qui fait intervenir les polylogarithmes *multiples*. De manière imprécise, il s’agit de donner une « formule » pour le régulateur de Borel en termes de polylogarithmes multiples. GONCHAROV (2005b) a apporté une contribution importante dans cette direction en décrivant le régulateur de Borel via une fonction appelée polylogarithme grassmannien (univalué). CHARLTON, GANGL et RADCHENKO (2019) donnent une formule pour une variante multivaluée de cette fonction, due à GONCHAROV (2013), en termes de polylogarithmes multiples. Ces résultats suggèrent qu’on dispose aujourd’hui de tous les ingrédients nécessaires à la réalisation de cette première étape⁽³⁾.
- 2) La deuxième étape consiste à passer des polylogarithmes multiples aux polylogarithmes classiques. Cette étape se passe au niveau de versions motiviques de ces fonctions, où une structure (comultiplicative) supplémentaire permet de distinguer les périodes d’extensions (1). Le caractère inexplicite du formalisme motivique amène en fait à travailler avec des versions « symboliques » des polylogarithmes multiples, ce qui demande une compréhension fine des relations fonctionnelles qu’ils satisfont.

Le programme de Goncharov

Un des enjeux de la conjecture de Zagier est de décrire explicitement la K -théorie des corps de nombres. Les travaux de MATSUMOTO (1969) sur le K_2 prolongés par MILNOR (1970), ainsi que ceux de SUSLIN (1990) sur le K_3 , laissent à penser que le cas des corps de nombres n’est pas spécial et qu’il existe des descriptions explicites uniformes des groupes de K -théorie de tous les corps. Le point de vue motivique permet d’éclairer cette question : en admettant des conjectures générales on dispose pour tout corps F d’une catégorie $MT(F)$ où les groupes d’extensions sont reliés à la K -théorie par une formule qui raffine (1). Le formalisme tannakien fournit donc des *complexes motiviques* qui calculent les groupes de K -théorie de F (ou plus précisément les gradués pour la γ -filtration définie par SOULÉ (1985)).

Une idée centrale de Goncharov est de s’inspirer de ces complexes motiviques pour donner des descriptions inconditionnelles de la K -théorie des corps qui soient aussi explicites et « petites » que possible. Du point de vue motivique, l’enjeu est de donner

2. Ce terme est parfois utilisée pour qualifier les résultats de BEILINSON et DELIGNE (1994) et DE JEU (1995), qui sont de nature différente.

3. Les résultats de GERDES (1991) vont dans la même direction puisqu’ils donnent une description d’une partie de la K -théorie rationnelle des corps en termes de géométrie projective *linéaire* et donnent donc du poids à la conjecture selon laquelle les extensions (1) proviennent toutes de motifs polylogarithmiques multiples.

une définition inconditionnelle de la catégorie $\mathrm{MT}(F)$ « par générateurs et relations », le rôle des générateurs étant joué par les polylogarithmes multiples (motiviques) ou par certaines variantes. On rassemble ici sous le terme *programme de Goncharov* l'ensemble cohérent de constructions et de conjectures développées par Goncharov dans cette direction durant les trente dernières années. Le second objectif de ce texte est d'en présenter certaines idées directrices (et notamment la *conjecture de liberté* et la *conjecture de profondeur*) et de placer dans ce cadre les résultats de GANGL (2016) et GONCHAROV et RUDENKO (2018), mais aussi des contributions de CHARLTON, GANGL et RADCHENKO (2019) et de RUDENKO (2020).

Organisation de ce texte. — Au §1 on présente la conjecture de Zagier et ses liens avec la K -théorie. On y aborde le problème des relations polylogarithmiques et on définit les *complexes polylogarithmiques* de Goncharov. Le §2 introduit les catégories de motifs de Tate mixtes et leur formalisme tannakien. Dans ce cadre, on étudie dans les §3 et 4 les versions motiviques des polylogarithmes (multiples), qui mènent à une interprétation motivique de la conjecture de Zagier. On énonce et analyse la *conjecture de liberté* et la *conjecture de profondeur* de Goncharov, qui sont des énoncés généraux sur la structure de la catégorie des motifs de Tate mixtes sur un corps.

Après avoir introduit les corrélateurs, qui sont des variantes des polylogarithmes multiples, on étudie au §5 les résultats de Gangl et Goncharov–Rudenko sur la structure fine des motifs de Tate mixtes en poids ≤ 4 , qui mènent à la preuve de la conjecture de Zagier pour $n = 4$. Un rôle important est joué par certaines familles de relations entre polylogarithmes multiples qui trouvent leur origine dans l'étude des structures amassées, point de vue qu'on développe au §6. On conclut en mentionnant les travaux récents de Rudenko sur la conjecture de profondeur.

Il est ici question d'un sujet aux multiples ramifications dont certains des aspects importants n'apparaissent pas dans ce texte, par manque de place. C'est notamment le cas des liens avec la géométrie hyperbolique (voir par exemple GONCHAROV (1999), BROWN (2013), RUDENKO (2020)) et des aspects « non génériques » reliés à la K -théorie de variétés générales et aux classes caractéristiques (voir par exemple GONCHAROV (1993), GONCHAROV et RUDENKO (2018)).

Notations et conventions. — Pour des nombres complexes non nuls a, b on note $a \sim_{\mathbb{Q}^\times} b$ pour signifier que $a \in \mathbb{Q}^\times b$. Pour un groupe abélien A on note $A_{\mathbb{Q}} = A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. On note $\mathbb{Q}[X]$ le \mathbb{Q} -espace vectoriel librement engendré par les éléments d'un ensemble X . Pour une application f de X vers un \mathbb{Q} -espace vectoriel V , on note $f : \mathbb{Q}[X] \rightarrow V$ l'application linéaire induite. On note V_n la composante homogène de degré n d'un espace vectoriel \mathbb{Z} -gradué V . Tous les espaces vectoriels, algèbres, etc. sont implicitement définis sur \mathbb{Q} .

Remerciements. — Je tiens à remercier Herbert Gangl, Alexander Goncharov, et Daniil Rudenko pour leur aide précieuse dans la préparation de ce texte et la patience avec

laquelle ils m'ont expliqué leurs travaux. Un grand merci aussi à Francis Brown, Damien Calaque, et Javier Fresán pour leurs commentaires et suggestions sur une version préliminaire de ce texte.

1. LA CONJECTURE DE ZAGIER

1.1. La formule analytique du nombre de classes

Soit F un corps de nombres, dont on note r_1 le nombre de plongements réels (numérotés $\sigma_1, \dots, \sigma_{r_1}$) et r_2 le nombre de paires de plongements complexes conjugués non réels (numérotés $\sigma_{r_1+1}, \dots, \sigma_{r_1+r_2}, \overline{\sigma_{r_1+1}}, \dots, \overline{\sigma_{r_1+r_2}}$), de sorte que le degré de F est $[F : \mathbb{Q}] = r_1 + 2r_2$. Le *régulateur de Dirichlet* est le morphisme de groupes abéliens

$$(2) \quad \rho : \mathcal{O}_F^\times \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}^{r_1+r_2}$$

défini par $\rho(x) = (\log |\sigma_1(x)|, \dots, \log |\sigma_{r_1}(x)|, \log |\sigma_{r_1+1}(x)|^2, \dots, \log |\sigma_{r_1+r_2}(x)|^2)$ pour $x \in \mathcal{O}_F^\times$, et $\rho(k) = \frac{1}{r_1+r_2}(k, \dots, k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Le théorème des unités de Dirichlet affirme que ρ est injectif modulo torsion et que son image est un réseau de $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$; le régulateur de F , noté R_F , est le covolume de ce réseau.

La *formule analytique du nombre de classes* exprime le résidu de la fonction zêta de F en $s = 1$ en fonction du régulateur, du nombre w_F de racines de l'unité dans F , du discriminant D_F , et du nombre de classes h_F :

$$(3) \quad \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)\zeta_F(s) = \frac{2^{r_1+r_2} h_F}{w_F} \frac{\pi^{r_2}}{\sqrt{|D_F|}} R_F .$$

Comme son nom l'indique, son intérêt premier est de donner accès au nombre de classes. Cependant, nous nous intéresserons ici à la partie *transcendante* de la formule, que nous écrirons sous la forme

$$(4) \quad \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)\zeta_F(s) \sim_{\mathbb{Q}^\times} \frac{\pi^{r_2}}{\sqrt{|D_F|}} \det(\log |\sigma_i(\varepsilon_j)|)_{1 \leq i, j \leq r_1+r_2-1} ,$$

où $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r_1+r_2-1})$ est une base de \mathcal{O}_F^\times modulo torsion.

1.2. Polylogarithmes et conjecture de Zagier

ZAGIER (1991) a conjecturé une généralisation de la formule (4) à toutes les valeurs spéciales des fonctions zêta de Dedekind, où le logarithme doit être remplacé par les polylogarithmes. Pour un entier $n \geq 1$, rappelons la définition du n -ème *polylogarithme classique* :

$$(5) \quad \text{Li}_n(z) = \sum_{k \geq 1} \frac{z^k}{k^n} \quad (z \in \mathbb{C}, |z| < 1) .$$

On renvoie le lecteur à LEWIN (1981) pour une histoire de ces fonctions qui remonte à Leibniz. On a $\text{Li}_1(z) = -\log(1-z)$ et l'équation différentielle $\text{Li}'_n(z) = \frac{1}{z} \text{Li}_{n-1}(z)$, pour $n \geq 2$, montre que Li_n se prolonge en une fonction holomorphe *multivaluée* sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Le caractère multivalué signifie que la détermination de $\text{Li}_n(z)$ change quand on fait un prolongement en suivant un lacet autour de $z = 1$. On introduit les versions *univaluées*

$$P_n(z) = p_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k B_k}{k!} \log^k |z| \text{Li}_{n-k}(z) \right) = p_n \left(\text{Li}_n(z) - \log |z| \text{Li}_{n-1}(z) + \cdots \right),$$

où les B_k sont les nombres de Bernoulli⁽⁴⁾ et où $p_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/(2i\pi)^n \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$ est l'application « partie réelle » si n est impair et « partie imaginaire » si n est pair. Ce sont des fonctions sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ qui sont analytiques réelles et se prolongent par continuité à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ si $n \geq 2$, avec $P_n(0) = P_n(\infty) = 0$. Comme on le verra plus bas, les fonctions P_n sont naturelles du point de vue motivique (BEILINSON et DELIGNE 1994), ce qui explique qu'elles se comportent mieux que d'autres versions univaluées des polylogarithmes classiques (considérées par exemple par RAMAKRISHNAN (1986) et ZAGIER (1990)).

On a $P_1(z) = -\log |1 - z|$, et $P_2(z) = \text{Im}(\text{Li}_2(z) + \log |z| \log(1 - z))$ est une fonction spéciale remarquable qui est connue dans la littérature sous le nom de *dilogarithme de Bloch–Wigner* (BLOCH 1977, 1978). Elle vérifie une équation fonctionnelle « à 5 termes », pour $x, y \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$:

$$(6) \quad P_2(x) - P_2(y) + P_2\left(\frac{y}{x}\right) - P_2\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + P_2\left(\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right) = 0$$

qu'on peut prouver en notant⁽⁵⁾ que $dP_2 = -\log |1 - x| d \log(x) + \log |x| d \log(1 - x)$ et que le membre de gauche s'annule pour $x = y$.

Soient F un corps de nombres et r_1, r_2 comme dans le paragraphe précédent. Pour un entier $n \geq 2$ posons

$$(7) \quad d_n = \begin{cases} r_1 + r_2 & \text{si } n \text{ est impair} \\ r_2 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

et fixons l'identification

$$(8) \quad \left(\bigoplus_{\sigma: F \rightarrow \mathbb{C}} \mathbb{C}/(2i\pi)^n \mathbb{R} \right)^+ \simeq \mathbb{R}^{d_n}$$

où le symbole $+$ désigne l'espace des invariants pour la conjugaison complexe, qui agit à la fois sur $\mathbb{C}/(2i\pi)^n \mathbb{R}$ et sur l'ensemble des plongements de F dans \mathbb{C} . Si P_n est vu comme étant à valeurs dans $\mathbb{C}/(2i\pi)^n \mathbb{R}$ il vérifie $P_n(\bar{z}) = \overline{P_n(z)}$ et on obtient grâce à (8) un morphisme noté

$$(9) \quad P_n^F : \mathbb{Q}[F^\times] \rightarrow \mathbb{R}^{d_n}.$$

4. $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, etc.

5. On peut aussi (voir par exemple ZAGIER (2007)) la prouver par une méthode de géométrie hyperbolique en remarquant que $P_2(x)$ est le volume du tétraèdre hyperbolique « idéal » dont les sommets sont $\infty, 0, 1$, et x dans le bord de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 , identifié à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. L'équation à 5 termes exprime l'additivité du volume pour les 5 tétraèdres hyperboliques dont les sommets sont pris parmi $\infty, 0, 1, x, y$. Il s'agit d'une version univaluée d'une équation fonctionnelle pour $\text{Li}_2(z)$ due à Abel.

Il se calcule, pour $x \in F^\times$, par

$$P_n^F(x) = \begin{cases} (P_n(\sigma_1(x)), \dots, P_n(\sigma_{r_1+r_2}(x))) & \text{si } n \text{ est impair} \\ (P_n(\sigma_{r_1}(x)), \dots, P_n(\sigma_{r_1+r_2}(x))) & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

et est étendu par linéarité à $\mathbb{Q}[F^\times]$.

CONJECTURE 1.1 (Zagier). — *Soient F un corps de nombres et n un entier ≥ 2 . Il existe des éléments $\xi_1, \dots, \xi_{d_n} \in \mathbb{Q}[F^\times]$ tels qu'on ait*

$$(10) \quad \zeta_F(n) \sim_{\mathbb{Q}^\times} \frac{\pi^{n([F:\mathbb{Q}]-d_n)}}{\sqrt{|D_F|}} \det \left(P_n^F(\xi_j) \right)_{1 \leq j \leq d_n} .$$

Dans le cas où F est totalement réel et n est pair, cette conjecture est un résultat de KLINGEN (1962) et SIEGEL (1969) (on a alors $d_n = 0$ et le déterminant dans (10) vaut 1) qui généralise la formule d'Euler : $\zeta(n) \sim_{\mathbb{Q}^\times} \pi^n$ pour n pair. Elle est aussi connue pour tout n dans le cas où F est un corps cyclotomique : cela découle en effet de la décomposition de la fonction zêta de F en produit de fonctions L de Dirichlet, et de ce que la valeur en n d'une telle fonction L s'exprime comme combinaison linéaire d'évaluations de Li_n aux racines de l'unité. Plus généralement, le théorème de Kronecker–Weber permet d'obtenir, pour un corps de nombres abélien F , une expression de $\zeta_F(n)$ en termes d'évaluations de Li_n aux racines de l'unité — qui ne sont cependant pas des éléments de F en général. Notons enfin que la conjecture 1.1 se prête à (et est justifiée par) des vérifications numériques, comme expliqué par ZAGIER (1991) et ZAGIER et GANGL (2000).

La conjecture 1.1 a été prouvée pour $n = 2$ par Zagier (voir la note de bas de page⁽¹⁾) et pour $n = 3$ par GONCHAROV (1991, 1994, 1995a). Le théorème suivant a été prouvé récemment par GONCHAROV et RUDENKO (2018).

THÉORÈME 1.2. — *La conjecture de Zagier est vraie pour $n = 4$.*

Remarque 1.3. — En utilisant l'équation fonctionnelle reliant $\zeta_F(s)$ à $\zeta_F(1-s)$, on peut exprimer (10) sous la forme plus simple $\zeta_F^*(1-n) \sim_{\mathbb{Q}^\times} \det (P_n(\xi_j))_{1 \leq j \leq d_n}$, où $\zeta_F^*(1-n)$ est le premier coefficient non nul dans le développement limité de $\zeta_F(s)$ en $s = 1-n$ (qui s'avère être le coefficient de degré d_n).

1.3. Polylogarithmes multiples

Pour des entiers $n_1, \dots, n_r \geq 1$ on peut généraliser (5) et définir en suivant GONCHAROV (1995b) le *polylogarithme multiple* (à plusieurs variables)

$$(11) \quad \text{Li}_{n_1, \dots, n_r}(z_1, \dots, z_r) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_r} \frac{z_1^{k_1} \dots z_r^{k_r}}{k_1^{n_1} \dots k_r^{n_r}} ,$$

qui est une fonction holomorphe au voisinage de $z_i = 0$ et qu'on peut prolonger analytiquement. L'étude de telles fonctions, aussi appelées *hyperlogarithmes*, remonte au

moins à KUMMER (1840) et POINCARÉ (1884). Elles apparaissent naturellement lorsqu'on multiplie des polylogarithmes classiques, par exemple

$$\operatorname{Li}_{n_1}(z_1) \operatorname{Li}_{n_2}(z_2) = \operatorname{Li}_{n_1, n_2}(z_1, z_2) + \operatorname{Li}_{n_2, n_1}(z_2, z_1) + \operatorname{Li}_{n_1+n_2}(z_1 z_2) ,$$

qui s'obtient facilement en découpant le domaine de sommation double. On appelle *poids* la somme $n_1 + \dots + n_r$ des indices dans (11) et *profondeur* le nombre r d'indices. Un fait général est que les relations fonctionnelles linéaires entre polylogarithmes multiples sont homogènes pour le poids. En revanche, pour un poids donné, il existe de nombreuses relations entre polylogarithmes multiples de profondeurs différentes. Par exemple, la relation suivante, valable autour de $x = y = 0$ et qui se montre par différentiation, permet d'exprimer la fonction de deux variables $\operatorname{Li}_{1,1}$ comme combinaison linéaire d'évaluations de la fonction d'une variable Li_2 :

$$\operatorname{Li}_{1,1}(x, y) = \operatorname{Li}_2\left(\frac{y(1-x)}{y-1}\right) - \operatorname{Li}_2\left(\frac{y}{y-1}\right) - \operatorname{Li}_2(xy) .$$

De même, en poids 3, les fonctions $\operatorname{Li}_{2,1}$, $\operatorname{Li}_{1,2}$ et $\operatorname{Li}_{1,1,1}$ peuvent toutes s'exprimer comme combinaisons linéaires d'évaluations de Li_3 et de produits d'évaluations de Li_1 et Li_2 .

Ce phénomène s'arrête en poids 4, où Li_1 , Li_2 , Li_3 , Li_4 ne suffisent pas à exprimer tous les polylogarithmes multiples, comme remarqué par BÖHM (1964) dans le contexte du calcul des volumes hyperboliques en dimension 7 (voir aussi WECHSUNG (1991), WOJTKOWIAK (1991), et GONCHAROV (1994)). Comme nous le verrons plus bas, c'est ce qui rend le cas $n = 4$ de la conjecture de Zagier différent des cas $n = 2, 3$ et crucial dans la compréhension du cas général.

1.4. K -théorie et régulateurs supérieurs

La conjecture de Zagier est la partie émergée d'un iceberg qui interroge la description de la K -théorie des corps. D'après QUILLEN (1973), les foncteurs de K -théorie associent, pour tout entier $i \geq 0$, un groupe abélien $K_i(R)$ à un anneau (unitaire) R , qui est un invariant « homotopique » de la catégorie des R -modules projectifs. Nous serons surtout intéressés par la K -théorie rationnelle $K_i(R)_{\mathbb{Q}}$, qui est plus facile à calculer. En effet, le théorème de MILNOR et MOORE (1965) permet d'en donner une description « homologique » comme l'espace des éléments primitifs de l'homologie rationnelle du groupe général linéaire stable $GL(R)$ (l'union des groupes $GL_N(R)$, où l'inclusion $GL_N(R) \hookrightarrow GL_{N+1}(R)$ est donnée par $g \mapsto \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$) :

$$K_i(R)_{\mathbb{Q}} \simeq \operatorname{Prim} H_i(GL(R), \mathbb{Q}) .$$

La K -théorie rationnelle d'un corps de nombres F a été complètement calculée par BOREL (1974, 1977). En plus des calculs classiques $K_0(F) = \mathbb{Z}$ et $K_1(F) = F^{\times}$, Borel démontre l'annulation $K_{2i}(F)_{\mathbb{Q}} = 0$ pour $i \geq 1$. Concernant le degré impair, il définit pour tout $n \geq 2$ une classe de cohomologie dans $H^{2n-1}(GL(\mathbb{C}), \mathbb{C}/(2i\pi)^n \mathbb{R})$, qui induit un morphisme $K_{2n-1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}/(2i\pi)^n \mathbb{R}$. Celui-ci est compatible à la conjugaison complexe et induit par functorialité et l'identification (8) le *régulateur de Borel*

$$\rho_n : K_{2n-1}(F) \longrightarrow \mathbb{R}^{d_n} .$$

Il joue pour les groupes de K -théorie supérieurs le même rôle que le régulateur de Dirichlet (2) pour le groupe $K_1(\mathcal{O}_F) \simeq \mathcal{O}_F^\times$ (on a $K_i(\mathcal{O}_F)_\mathbb{Q} \simeq K_i(F)_\mathbb{Q}$ pour $i \geq 2$), comme le montre le théorème suivant.

THÉORÈME 1.4 (Borel). — *Soit $n \geq 2$. Le régulateur ρ_n est injectif modulo torsion (et donc $\dim_{\mathbb{Q}} K_{2n-1}(F)_\mathbb{Q} = d_n$). Son image est un réseau de \mathbb{R}^{d_n} dont le covolume $R_F^{(n)}$ est relié à la fonction zêta de F par la formule*

$$(12) \quad \zeta_F(n) \sim_{\mathbb{Q}^\times} \frac{\pi^{n([F:\mathbb{Q}]-d_n)}}{\sqrt{|D_F|}} R_F^{(n)} .$$

Les preuves déjà mentionnées de la conjecture de Zagier pour $n = 2, 3, 4$ s'appuient sur le théorème de Borel et la preuve de la conjecture suivante, que nous préciserons plus bas, dont l'enjeu est de donner une « formule » pour le régulateur ρ_n .

CONJECTURE 1.5. — *Il existe*

— *un sous-espace $\mathcal{R}_n(F) \subset \mathbb{Q}[F^\times]$;*

— *une application linéaire $\varphi_n : K_{2n-1}(F)_\mathbb{Q} \rightarrow \mathcal{B}_n(F) := \mathbb{Q}[F^\times]/\mathcal{R}_n(F)$;*

tels que P_n^F passe au quotient par $\mathcal{R}_n(F)$ et qu'on ait le diagramme commutatif suivant :

$$(13) \quad \begin{array}{ccccc} K_{2n-1}(F)_\mathbb{Q} & \xrightarrow{\varphi_n} & \mathcal{B}_n(F) & \xrightarrow{P_n^F} & \mathbb{R}^{d_n} \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & & \rho_n & \end{array}$$

En effet, (10) découle alors de (12) et (13) en prenant pour $(\xi_j)_{1 \leq j \leq d_n}$ des représentants des images par φ_n des éléments d'une base de $K_{2n-1}(F)_\mathbb{Q}$.

Remarque 1.6. — Vu que le régulateur de Borel est d'abord défini sur la K -théorie de \mathbb{C} puis induit sur celle de F par functorialité, il est naturel de sortir la conjecture 1.5 du cadre des corps de nombres et de vouloir définir $\mathcal{R}_n(F)$ et φ_n pour un corps F quelconque, de manière fonctorielle en F — ce que nous ferons dans le prochain paragraphe.

Remarque 1.7. — Le nombre rationnel implicite dans (12) devrait essentiellement être, selon une conjecture de LICHTENBAUM (1973), le quotient des ordres des sous-groupes de torsion de $K_i(\mathcal{O}_F)$ pour $i \in \{2n-2, 2n-1\}$. Cela généralise naturellement (3) puisque les sous-groupes de torsion de $K_0(\mathcal{O}_F)$ et $K_1(\mathcal{O}_F)$ sont le groupe des classes de F et le groupe des racines de l'unité de F respectivement. Cette conjecture est connue pour F totalement réel et n pair (on renvoie le lecteur à l'article de survol de KAHN (2005) pour plus de détails).

Remarque 1.8. — BEILINSON (1985) a défini des régulateurs pour toutes les variétés algébriques sur \mathbb{Q} (la construction de Beilinson dans le cas de la variété $\text{Spec}(F)$ redonne le double du régulateur de Borel d'après BURGOS GIL (2002)) et conjecturé une vaste généralisation du théorème de Borel dans ce cadre. Une version de la conjecture de Zagier pour la valeur en $s = 2$ de la fonction L d'une courbe elliptique sur \mathbb{Q} , qui fait

intervenir le dilogarithme elliptique de BLOCH (1978), a été démontrée par GONCHAROV et LEVIN (1998).

1.5. Relations polylogarithmiques

On appelle $\mathcal{R}_n(F) \subset \mathbb{Q}[F^\times]$ comme dans la conjecture 1.5 un espace de *relations polylogarithmiques*. GONCHAROV (1994, 1995a) a défini un candidat pour cet espace qui a l'avantage d'avoir un sens pour un corps F quelconque et que nous décrivons maintenant ⁽⁶⁾.

1.5.1. Définition récursive. — Pour démontrer des équations fonctionnelles pour la fonction Li_n , l'outil principal est de se ramener à la fonction Li_{n-1} grâce à l'équation différentielle

$$(14) \quad d\text{Li}_n(z) = \text{Li}_{n-1}(z) d\log(z) .$$

Plus précisément, on se ramène à des spécialisations d'équations fonctionnelles en une variable $\sum_i a_i \text{Li}_n(x_i(t)) = \text{constante}$, avec $a_i \in \mathbb{Q}$ et $x_i(t) \in \mathbb{C}(t)$, qui se démontrent par différentiation par rapport à t . La définition de $\mathcal{R}_n(F)$ s'obtient en abstrayant ce procédé.

On définit récursivement sur $n \geq 2$ un sous-espace $\mathcal{R}_n(F) \subset \mathbb{Q}[F^\times]$ et le quotient

$$\mathcal{B}_n(F) = \mathbb{Q}[F^\times] / \mathcal{R}_n(F) ,$$

de manière fonctorielle en F ; on note $[x]_n$ la classe de $x \in F^\times$ dans $\mathcal{B}_n(F)$. Les $\mathcal{B}_n(F)$ sont parfois appelés *groupes de Bloch supérieurs* ⁽⁷⁾. Dans tout ce qui suit il sera pratique de voir $\mathbb{Q}[F^\times]$ comme le quotient de $\mathbb{Q}[\mathbb{P}^1(F)]$ par les relations $[\infty] = [0] = 0$. On considère

$$(15) \quad \tilde{\delta}_2 : \mathbb{Q}[F^\times] \rightarrow \Lambda^2 F_{\mathbb{Q}}^\times , [x] \mapsto -(1-x) \wedge x , [1] \mapsto 0 .$$

Pour $n \geq 3$, en supposant le foncteur \mathcal{B}_{n-1} défini, on considère

$$(16) \quad \tilde{\delta}_n : \mathbb{Q}[F^\times] \rightarrow \mathcal{B}_{n-1}(F) \otimes F_{\mathbb{Q}}^\times , [x] \mapsto [x]_{n-1} \otimes x .$$

Ces formules sont censées rappeler (14). On définit alors $\mathcal{R}_n(F)$ comme le sous-espace de $\mathbb{Q}[F^\times]$ engendré par les différences $\xi(1) - \xi(0)$, pour $\xi(t) \in \mathbb{Q}[F(t)^\times]$ dans le noyau du morphisme $\tilde{\delta}_n$ associé au corps $F(t)$.

On montre que la fonction P_n passe au quotient par $\mathcal{R}_n(\mathbb{C})$ et induit $P_n : \mathcal{B}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$ et donc $P_n^F : \mathcal{B}_n(F) \rightarrow \mathbb{R}^{d_n}$ pour F un corps de nombres.

Exemple 1.9. — Calculons pour $x \in F^\times \setminus \{1\}$:

$$\tilde{\delta}_2([x] + [x^{-1}]) = -(1-x) \wedge x - (1-x^{-1}) \wedge x^{-1} = \frac{1}{1-x} \wedge x + \frac{x-1}{x} \wedge x = \frac{-1}{x} \wedge x = 0 .$$

6. ZAGIER (1991) en avait auparavant considéré des variantes spécifiques au cas des corps de nombres. Zagier comme Goncharov considèrent en fait des versions des objets $\mathcal{R}_n(F)$ et $\mathcal{B}_n(F)$ dans les groupes abéliens, respectivement sous-objets et quotients du groupe abélien libre $\mathbb{Z}[F^\times]$.

7. Cette terminologie est parfois utilisée dans la littérature pour désigner d'autres objets.

Ainsi, l'élément $\xi(t) = [tx] + [(tx)^{-1}]$ est dans le noyau de $\tilde{\delta}_2 : \mathbb{Q}[F(t)^\times] \rightarrow \Lambda^2(F(t)^\times_{\mathbb{Q}})$ et l'élément $\xi(1) - \xi(0) = [x] + [x^{-1}]$ est dans $\mathcal{R}_2(F)$. Ce raisonnement est analogue à la preuve de l'équation fonctionnelle $P_2(z) + P_2(z^{-1}) = 0$ par dérivation et évaluation en $z = 0$. Un raisonnement analogue permet de montrer par récurrence sur $n \geq 2$ la relation $[x]_n + (-1)^n[x]_n = 0$ dans $\mathcal{B}_n(F)$, qui correspond à l'équation fonctionnelle $P_n(z) + (-1)^n P_n(z) = 0$.

Remarque 1.10. — On espère pouvoir donner une description concrète (éventuellement conjecturale) de $\mathcal{R}_n(F)$ en produisant des familles assez générales de relations polylogarithmiques.

1.5.2. Relations polylogarithmiques pour $n = 2, 3$. — Un rapide calcul montre que la relation suivante, qui rappelle la relation à 5 termes (6), est vérifiée dans $\mathcal{B}_2(F)$ pour tous les $x, y \in F \setminus \{0, 1\}$:

$$(17) \quad [x]_2 - [y]_2 + \left[\frac{y}{x}\right]_2 - \left[\frac{1-y}{1-x}\right]_2 + \left[\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right]_2 = 0 .$$

Une forme plus agréable de cette relation est

$$(18) \quad \sum_{i=0}^4 (-1)^i [r(a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_4)]_2 = 0 ,$$

où a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 sont des points deux à deux distincts de la droite projective $\mathbb{P}^1(F)$ et où l'on note $r(a, b, c, d) = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}$ le birapport de 4 points. On obtient (17) en spécialisant à $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (\infty, 0, 1, x, y)$, et les relations $[1]_2 = 0$, $[x]_2 + [x^{-1}]_2 = 0$, et $[x]_2 + [1-x]_2 = 0$ en spécialisant à des cas dégénérés. Un argument dû à WOJTKO-WIAK (1996) montre que si F est algébriquement clos, ces relations engendrent toutes les relations polylogarithmiques pour $n = 2$. C'est aussi le cas si F est un corps de nombres, ce qui découle de la preuve de la conjecture de Zagier pour $n = 2$ et des travaux de SUSLIN (1990). On conjecture que cela vaut pour tout corps F .

La preuve de la conjecture de Zagier pour $n = 3$ repose notamment sur une variante de la relation (18) découverte par GONCHAROV (1994, 1995a). On peut l'écrire sous la forme très (anti)symétrique, découverte indépendamment par Goncharov et Zagier, d'une relation « à 840 termes » dans $\mathcal{B}_3(F)$:

$$(19) \quad \sum_{i=0}^6 (-1)^i R_3(a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_6) = 0 ,$$

où a_0, \dots, a_6 sont des points de $\mathbb{P}^2(F)$ en position générale et $R_3(a_1, \dots, a_6) \in \mathbb{Q}[F^\times]$ est un invariant d'une configuration de 6 points en position générale dans le plan projectif obtenue en antisymétrisant une variante du birapport (appelée *trirapport*). Goncharov conjecture que les relations (19) et leurs spécialisations engendrent toutes les relations polylogarithmiques pour $n = 3$.

1.6. Complexes polylogarithmiques

Le programme de Goncharov va bien au-delà du cas des corps de nombres et propose une description « symbolique » de la K -théorie rationnelle d'un corps F quelconque, dans l'esprit de la description de $K_2(F)$ par MATSUMOTO (1969) et de sa généralisation par MILNOR (1970). Cette proposition, qui à première vue peut sembler arbitraire, sera éclairée par des considérations motiviques dans le prochain paragraphe.

Les morphismes $\tilde{\delta}_n$ définis par (15) et (16) passent au quotient et induisent des morphismes

$$\delta_2 : \mathcal{B}_2(F) \rightarrow \Lambda^2 F_{\mathbb{Q}}^{\times} \quad \text{et} \quad \delta_n : \mathcal{B}_n(F) \rightarrow \mathcal{B}_{n-1}(F) \otimes F_{\mathbb{Q}}^{\times} \quad \text{pour } n \geq 3 .$$

Ces morphismes s'assemblent en un complexe, le n -ème *complexe polylogarithmique*, noté $\mathcal{B}^{\bullet}(F, n)$, où $\mathcal{B}_n(F)$ est placé en degré cohomologique 1 :

$$0 \rightarrow \mathcal{B}_n(F) \rightarrow \mathcal{B}_{n-1}(F) \otimes F_{\mathbb{Q}}^{\times} \rightarrow \mathcal{B}_{n-2}(F) \otimes \Lambda^2 F_{\mathbb{Q}}^{\times} \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \mathcal{B}_2(F) \otimes \Lambda^{n-2} F_{\mathbb{Q}}^{\times} \rightarrow \Lambda^n F_{\mathbb{Q}}^{\times} \rightarrow 0 .$$

Il est commode d'étendre les définitions à $n \leq 1$ en posant $\mathcal{B}_0(F) = \mathbb{Q}$, $\mathcal{B}_1(F) = F_{\mathbb{Q}}^{\times}$, et donc $\mathcal{B}^{\bullet}(F, 0) = \mathbb{Q}$, $\mathcal{B}^{\bullet}(F, 1) = F_{\mathbb{Q}}^{\times}[-1]$.

On peut maintenant énoncer une conjecture centrale du programme de Goncharov. Notons gr_{γ} les gradués pour la γ -filtration en K -théorie (SOULÉ 1985), issue de la structure de λ -anneau sur $K_{\bullet}(F)_{\mathbb{Q}}$ induite par les opérateurs de puissance extérieure des F -espaces vectoriels.

CONJECTURE 1.11. — *On a des isomorphismes fonctoriels en le corps F , pour tout entier $n \geq 0$ et tout entier relatif i :*

$$H^i(\mathcal{B}^{\bullet}(F, n)) \simeq \text{gr}_{\gamma}^n K_{2n-i}(F)_{\mathbb{Q}} .$$

On voit facilement que cette conjecture est vérifiée pour $n \leq 1$, ainsi que dans le cas $i = n$ puisque $H^n(\mathcal{B}^{\bullet}(F, n)) = K_n^M(F)_{\mathbb{Q}}$, la K -théorie de Milnor rationnelle, qui est isomorphe à $\text{gr}_{\gamma}^n K_n(F)_{\mathbb{Q}}$ d'après SUSLIN (1984) et SOULÉ (1985).

Remarque 1.12. — Une des sources de la conjecture 1.11 est le résultat de SUSLIN (1990) qui fournit une suite exacte⁽⁸⁾

$$0 \rightarrow \text{gr}_{\gamma}^2 K_3(F)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}[F^{\times}]/\mathcal{R}_2^{(5)}(F) \xrightarrow{\delta_2} \Lambda^2(F_{\mathbb{Q}}^{\times}) \rightarrow K_2(F)_{\mathbb{Q}} \rightarrow 0 ,$$

où l'on a noté $\mathcal{R}_2^{(5)}(F) \subset \mathcal{R}_2(F)$ le sous-espace engendré par les relations à 5 termes (17) et leurs spécialisations. On en déduit une surjection $\text{gr}_{\gamma}^2 K_3(F)_{\mathbb{Q}} \twoheadrightarrow H^1(\mathcal{B}^{\bullet}(F, 2))$, qui est un isomorphisme si et seulement si $\mathcal{R}_2^{(5)}(F) = \mathcal{R}_2(F)$, ce qui est le cas si F est un corps de nombres ou un corps algébriquement clos par la discussion du §1.5.2.

8. Le résultat de Suslin est plus précis puisqu'il prend aussi en compte la torsion en K -théorie.

Dans le cas d'un corps de nombres, les travaux de Borel (et la réinterprétation du régulateur de Borel par Beilinson, voir la remarque 1.8) ont pour conséquence l'annulation :

$$(20) \quad \mathrm{gr}_\gamma^n K_{2n-i}(F)_\mathbb{Q} = 0 \quad \text{si } i \neq 1 \quad (F \text{ corps de nombres}) .$$

La conjecture 1.11 implique donc dans ce cas un isomorphisme $K_{2n-1}(F)_\mathbb{Q} \simeq \ker(\delta_n)$ dont la composition avec l'inclusion $\ker(\delta_n) \subset \mathcal{B}_n(F)$ devrait donner lieu à un morphisme φ_n comme dans la conjecture 1.5.

Notons aussi que la conjecture 1.11 est compatible avec (et en fait implique) la conjecture d'annulation suivante de BEILINSON (1985) et SOULÉ (1985).

CONJECTURE 1.13 (Beilinson–Soulé). — *Pour tout corps F et tout entier $n \geq 1$:*

$$\mathrm{gr}_\gamma^n K_{2n-i}(F)_\mathbb{Q} = 0 \quad \text{si } i \leq 0 .$$

Cette conjecture est vérifiée pour les corps de nombres par (20).

Remarque 1.14. — La conjecture 1.11 exprime le fait que $\mathcal{B}^\bullet(F, n)$ est un *complexe motivique* pour la variété $\mathrm{Spec}(F)$, au sens de LICHTENBAUM (1984) et BEILINSON (1987).

1.7. Une stratégie vers la conjecture de Zagier, première version

En extrapolant à partir des preuves de la conjecture de Zagier pour $n = 2, 3$, il est tentant, en suivant GONCHAROV (1993, 1994, 1995a), de procéder comme suit. On cherche d'abord une application R_n de l'ensemble des familles de $2n$ points dans $\mathbb{P}^{n-1}(F)$ en position générale, à valeurs dans $\mathbb{Q}[F^\times]$. Supposons que R_n soit invariante pour l'action de $\mathrm{GL}_n(F)$ sur $\mathbb{P}^{n-1}(F)$ et qu'on ait la relation dans $\mathcal{B}_n(F)$:

$$(21) \quad \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i R_n(a_0, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_{2n}) = 0 ,$$

pour tous les a_0, \dots, a_{2n} en position générale dans $\mathbb{P}^{n-1}(F)$. (On peut même aller plus loin et spéculer sur le fait que les relations (21) et leurs spécialisations engendrent les relations polylogarithmiques.)

La suite de l'argument repose sur une construction d'algèbre homologique due à SUSLIN (1984). Notons $G_k(F, r)$ le \mathbb{Q} -espace vectoriel librement engendré par l'ensemble des $\mathrm{GL}_r(F)$ -orbites de familles (a_0, \dots, a_k) de points de F^r en position générale. On a des différentielles

$$\partial : G_k(F, r) \longrightarrow G_{k-1}(F, r) , \quad (a_0, \dots, a_k) \mapsto \sum_{i=0}^k (-1)^i (a_0, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_k)$$

$$\partial' : G_k(F, r) \longrightarrow G_{k-1}(F, r-1) , \quad (a_0, \dots, a_k) \mapsto \sum_{i=0}^k (-1)^i (a_i | a_0, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_k) ,$$

où la notation $(a_i | a_0, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_k)$ désigne la configuration associée aux images des points $a_0, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_k$ dans $F^r / F a_i \simeq F^{r-1}$. Elles donnent lieu à un complexe double

formé des $G_k(F, r)$ pour $k \geq r \geq n$, dont le complexe total est noté $BG^\bullet(F, n)$, la nème *complexe bigrassmannien*. Par convention, $G_k(F, r)$ y est placé en degré cohomologique $2n - k$. La motivation pour cette construction est que si F est un corps infini, $(G_\bullet(F, n), \partial)$ est une résolution du $\mathrm{GL}_n(F)$ -module trivial \mathbb{Q} et permet donc de construire des classes de cohomologie de $\mathrm{GL}_n(F)$. On considère tous les n à la fois pour produire des classes de cohomologie du groupe linéaire stable $\mathrm{GL}(F)$.

Une application R_n comme ci-dessus induit un morphisme $R_n : G_{2n-1}(F, n) \rightarrow \mathcal{B}_n(F)$ qui vérifie $R_n \circ \partial = 0$. Supposons qu'on puisse l'étendre en un morphisme de complexes

$$\tilde{R}_n : BG^\bullet(F, n) \longrightarrow \mathcal{B}^\bullet(F, n) .$$

Alors on obtient par un argument d'homologie des groupes un morphisme

$$H_{2n-1}(\mathrm{GL}(F), \mathbb{Q}) \longrightarrow \ker(\delta_n) \subset \mathcal{B}_n(F) ,$$

et donc un morphisme $\varphi_n : K_{2n-1}(F)_\mathbb{Q} \rightarrow \mathcal{B}_n(F)$. Il n'y a aucune raison *a priori* pour que ce morphisme fasse commuter le diagramme (13) (ou même qu'il soit non nul). Des techniques générales développées par Goncharov permettent de le montrer si l'on sait calculer la composante $G_n(F, n) \rightarrow \Lambda^n(F^\times)_\mathbb{Q}$ de \tilde{R}_n , à l'autre extrémité du complexe bigrassmannien.

1.8. Nécessité des polylogarithmes multiples

L'existence d'un morphisme \tilde{R}_n comme dans le paragraphe précédent est appelée « conjecture optimiste » par GONCHAROV (1994, Conjecture 5.12). En effet, cette stratégie semble être difficile à faire fonctionner au-delà des cas $n = 2, 3$. La raison est qu'il est difficile de produire des relations « intéressantes » dans $\mathcal{B}_n(F)$ (ou, ce qui revient au même, des équations fonctionnelles intéressantes pour les polylogarithmes classiques Li_n ou P_n) pour $n \geq 4$, et les relations de cocycle (21) semblent inaccessibles en général. En pratique, les équations fonctionnelles pour les polylogarithmes classiques font naturellement intervenir les polylogarithmes *multiples*, dont on ne peut se passer pour $n \geq 4$. Il faut donc adapter la stratégie en considérant cette plus grande classe de fonctions — même si au bout du compte seuls les polylogarithmes *classiques* sont censés intervenir si l'on croit à la conjecture de Zagier.

Dit autrement, il apparaît rétrospectivement que les espaces $\mathcal{B}_n(F)$ et les complexes $\mathcal{B}^\bullet(F, n)$ sont des objets trop petits pour être facilement maniables. On les verra plus bas à l'intérieur d'objets plus naturels et plus structurés : la cogèbre de Lie motivique $\mathcal{C}(F)$ et son complexe de Chevalley–Eilenberg. Le prochain paragraphe a pour but d'introduire ces objets et les liens qu'ils entretiennent avec la K -théorie.

2. MOTIFS DE TATE MIXTES ET K -THÉORIE

On introduit maintenant la catégorie des motifs de Tate mixtes sur F et on développe son formalisme tannakien. Il sera commode de supposer que la conjecture d'annulation

de Beilinson–Soulé (conjecture 1.13) est vraie, ou, ce qui revient au même, de se restreindre au cas des corps F pour laquelle elle est vérifiée, ce qui inclut le cas des corps de nombres.

2.1. Motifs de Tate mixtes

Pour un corps F , notons $\mathrm{DM}(F)$ la catégorie triangulée des motifs sur F à coefficients dans \mathbb{Q} (dont différentes constructions équivalentes existent, notamment par HANAMURA (1995), LEVINE (1998), et VOEVODSKY (2000)). Chaque variété X sur F définit un objet de cette catégorie, le *motif* de X , qu’il faut voir comme un complexe qui contrôle toutes les versions de la cohomologie de X (de Rham, singulière, ℓ -adique, etc.). Des foncteurs de réalisation définis sur $\mathrm{DM}(F)$ permettent de retrouver ces différents groupes de cohomologie à partir du motif de X . La différence fondamentale entre la catégorie des motifs et les différentes catégories de réalisations est que les morphismes dans $\mathrm{DM}(F)$ sont définis en termes de cycles algébriques, et sont notamment reliés aux groupes de Chow supérieurs de BLOCH (1986).

La catégorie $\mathrm{DM}(F)$ est tensorielle et on dispose d’un objet \otimes -inversible $\mathbb{Q}(-1)$, le *motif de Lefschetz*, dont les réalisations sont les groupes de cohomologie $H^1(\mathbb{P}_F^1 \setminus \{0, \infty\})$. On note $\mathbb{Q}(-n) = \mathbb{Q}(-1)^{\otimes n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Grâce à la comparaison entre groupes de Chow supérieurs et K -théorie on a des isomorphismes

$$(22) \quad \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}(F)}(\mathbb{Q}(-n), \mathbb{Q}(0)[i]) \simeq \mathrm{gr}_\gamma^n K_{2n-i}(F)_\mathbb{Q},$$

qui expliquent l’irruption de la théorie des motifs dans des questions liées à la K -théorie.

Grâce à l’annulation qui découle de la conjecture de Beilinson–Soulé, LEVINE (1993) définit une t -structure sur la sous-catégorie triangulée de $\mathrm{DM}(F)$ engendrée par les $\mathbb{Q}(-n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$, dont le cœur est par définition la catégorie $\mathrm{MT}(F)$ des *motifs de Tate mixtes* sur F . Tout objet M de cette catégorie est muni d’une filtration finie (par le *poids*) par des sous-objets $W_{2n}M$ de telle sorte que chaque gradué $\mathrm{gr}_{2n}^W M$ est une somme directe finie d’objets $\mathbb{Q}(-n)$.

En suivant BEILINSON (1987) on est amené à formuler la conjecture additionnelle suivante, parfois appelée *conjecture du $K(\pi, 1)$* .

CONJECTURE 2.1. — *Pour tous entiers n, i le morphisme naturel*

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{MT}(F)}^i(\mathbb{Q}(-n), \mathbb{Q}(0)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}(F)}(\mathbb{Q}(-n), \mathbb{Q}(0)[i]) \simeq \mathrm{gr}_\gamma^n K_{2n-i}(F)_\mathbb{Q}$$

est un isomorphisme.

Le morphisme ci-dessus est, pour des raisons générales, un isomorphisme si $i = 0, 1$ et injectif pour $i = 2$. On en déduit, grâce à l’annulation (20), que la conjecture est vérifiée dans le cas d’un corps de nombres.

Il est facile de décrire géométriquement les extensions de $\mathbb{Q}(-1)$ par $\mathbb{Q}(0)$ dans $\mathrm{MT}(F)$. Via l’isomorphisme entre le groupe d’extensions correspondant et $F_\mathbb{Q}^\times$, un élément $x \in F^\times$ est représenté par le *motif de Kummer* $K(x)$, dont les réalisations sont les groupes de cohomologie relative $H^1(\mathbb{P}_F^1 \setminus \{0, \infty\}, \{1, x\})$ si $x \neq 1$. La question de la

description géométrique des extensions de $\mathbb{Q}(-n)$ par $\mathbb{Q}(0)$ dans $\mathrm{MT}(F)$ pour $n \geq 2$ est difficile, et constitue en quelque sorte le coeur de la conjecture de Zagier, comme nous allons le voir.

2.2. Formalisme tannakien et complexes motiviques

La catégorie $\mathrm{MT}(F)$ est tannakienne neutre à coefficients dans \mathbb{Q} . Les différentes réalisations donnent lieu à des foncteurs fibre, parmi lesquels les foncteurs fibre de Rham (si F est de caractéristique nulle) $\omega_{\mathrm{dR}} : \mathrm{MT}(F) \rightarrow \mathrm{Vect}_F$, et Betti (cohomologie singulière, relative à un plongement complexe $\sigma : F \rightarrow \mathbb{C}$) $\omega_{\mathrm{B}} : \mathrm{MT}(F) \rightarrow \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}$. La comparaison $\omega_{\mathrm{dR}} \otimes_F \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \omega_{\mathrm{B}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ entre ces foncteurs donne lieu à des *matrices des périodes* pour les objets de $\mathrm{MT}(F)$. La matrice des périodes de $\mathbb{Q}(-n)$ est $((2i\pi)^n)$.

Dans la suite on travaillera surtout avec le foncteur fibre \mathbb{Z} -gradué canonique à valeurs dans les \mathbb{Q} -espaces vectoriels :

$$(23) \quad \omega : M \mapsto \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{MT}(F)}(\mathbb{Q}(-n), \mathrm{gr}_{2n}^W M) .$$

Si F est de caractéristique nulle, il s'agit d'une structure rationnelle sur le foncteur fibre de Rham : $\omega \otimes_{\mathbb{Q}} F \simeq \omega_{\mathrm{dR}}$. La graduation sur ω est couramment appelée *poids*, de sorte que $\mathbb{Q}(-n)$ est de poids n ⁽⁹⁾.

Par le formalisme tannakien, la catégorie $\mathrm{MT}(F)$ est équivalente à la catégorie des comodules sur une algèbre de Hopf commutative \mathbb{Z} -gradué $\mathcal{H}(F)$, où la graduation est encore appelée *poids*. Concrètement, $\mathcal{H}_n(F)$ est engendré en tant que \mathbb{Q} -espace vectoriel par des coefficients matriciels (M, v, φ) , où M est un objet de $\mathrm{MT}(F)$ et $v : \mathbb{Q}(-n) \rightarrow \mathrm{gr}_{2n}^W M$, $\varphi : \mathrm{gr}_0^W M \rightarrow \mathbb{Q}(0)$ sont deux morphismes. Les relations entre ces coefficients matriciels sont engendrées par les égalités $(M, f \circ v, \psi) = (N, v, \psi \circ f)$ pour des morphismes $f : M \rightarrow N$ et $v : \mathbb{Q}(-n) \rightarrow \mathrm{gr}_{2n}^W M$, $\psi : \mathrm{gr}_0^W N \rightarrow \mathbb{Q}(0)$. On a $\mathcal{H}_n(F) = 0$ si $n < 0$, $\mathcal{H}_0(F) = \mathbb{Q}$, $\mathcal{H}_1(F) = F_{\mathbb{Q}}^{\times}$.

Le produit dans $\mathcal{H}(F)$ est induit par le produit tensoriel des objets de $\mathrm{MT}(F)$ et le coproduit $\Delta : \mathcal{H}(F) \rightarrow \mathcal{H}(F) \otimes \mathcal{H}(F)$ se calcule par la formule

$$\Delta(M, v, \varphi) = \sum_i (M, e_i, \varphi) \otimes (M, v, e_i^{\vee}) ,$$

où (e_i) est n'importe quelle base de $\omega(M)$.

Il sera plus pratique de travailler modulo produits et de manipuler la cogèbre de Lie des indécomposables de $\mathcal{H}(F)$

$$\mathcal{C}(F) = \mathcal{H}_{>0}(F) / \mathcal{H}_{>0}(F) \mathcal{H}_{>0}(F) , \quad \delta : \mathcal{C}(F) \rightarrow \Lambda^2 \mathcal{C}(F) ,$$

dont le *cocrochet* δ est induit par Δ . Elle est $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ -gradué et vérifie $\mathcal{C}_1(F) = F_{\mathbb{Q}}^{\times}$. Pour $x \in F^{\times}$, l'élément correspondant de $\mathcal{C}_1(F)$ est le coefficient matriciel du motif de

9. Les poids sont donc divisés par 2 par rapport à la notion habituelle, pour laquelle $\mathbb{Q}(-n)$ est de poids $2n$.

Kummer $K(x)$ où v et φ sont induits par les isomorphismes naturels $\mathrm{gr}_0^W K(x) \simeq \mathbb{Q}(0)$ et $\mathrm{gr}_2^W K(x) \simeq \mathbb{Q}(-1)$ respectivement. On le note

$$\log^{\mathcal{C}}(x) \in \mathcal{C}_1(F) .$$

Les éléments de $\mathcal{H}(F)$ ou $\mathcal{C}(F)$ sont parfois appelés *périodes motiviques*, un terme qui recouvre plusieurs variantes de l'idée des coefficients matriciels dans une catégorie tannakienne de motifs (voir la remarque 3.1).

Remarque 2.2. — Le groupe tannakien correspondant au foncteur fibre (23) est le produit semi-direct de \mathbb{G}_m avec le schéma en groupes pro-unipotent $U(F) = \mathrm{Spec}(\mathcal{H}(F))$ et est souvent appelé *groupe de Galois motivique* de la catégorie $\mathrm{MT}(F)$. Il est complètement déterminé par l'algèbre de Lie graduée pro-nilpotente $\mathfrak{u}(F)$ de $U(F)$ (via la formule de Baker–Campbell–Hausdorff), qui s'obtient en dualisant la cogèbre de Lie $\mathcal{C}(F)$. L'avantage de travailler dans $\mathcal{H}(F)$ ou $\mathcal{C}(F)$ est qu'on peut facilement en produire des éléments et calculer leur coproduit ou cocrochet, alors qu'exhiber des points de $U(F)$ ou des éléments de $\mathfrak{u}(F)$ est incommode.

Pour un entier $n \geq 1$ on considère la partie de poids n du complexe de Chevalley–Eilenberg de $\mathcal{C}(F)$, noté $\mathrm{CE}^\bullet(\mathcal{C}(F))_n$, où $\mathcal{C}_n(F)$ est placé en degré cohomologique 1 :

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_n(F) \rightarrow (\Lambda^2 \mathcal{C}(F))_n \rightarrow (\Lambda^3 \mathcal{C}(F))_n \rightarrow \dots \rightarrow (\Lambda^{n-1} \mathcal{C}(F))_n \rightarrow \Lambda^n \mathcal{C}_1(F) \rightarrow 0 .$$

Sa cohomologie calcule des groupes d'extensions dans la catégorie des $\mathcal{C}(F)$ -comodules gradués, et plus précisément :

$$(24) \quad H^i(\mathrm{CE}^\bullet(\mathcal{C}(F))_n) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathrm{MT}(F)}^i(\mathbb{Q}(-n), \mathbb{Q}(0)) .$$

Si l'on croit à la conjecture 2.1, les complexes $\mathrm{CE}^\bullet(\mathcal{C}(F))_n$ sont donc des *complexes motiviques* (au sens de la remarque 1.14), dont l'existence est conditionnelle à la conjecture de Beilinson–Soulé. (On a vu que les deux conjectures sont vérifiées dans le cas d'un corps de nombres.) Une partie des travaux de Goncharov vise à définir, en s'inspirant de $\mathrm{CE}^\bullet(\mathcal{C}(F))$, des complexes motiviques inconditionnels qui soient aussi explicites et « petits » que possible.

Notons que dans le cas d'un corps de nombres F on obtient l'isomorphisme inconditionnel suivant qui identifie la K -théorie rationnelle de F avec l'espace des primitifs de la cogèbre de Lie motivique :

$$(25) \quad K_{2n-1}(F)_{\mathbb{Q}} \simeq H^1(\mathrm{CE}^\bullet(\mathcal{C}(F))_n) = \ker \left(\delta : \mathcal{C}_n(F) \rightarrow (\Lambda^2 \mathcal{C}(F))_n \right) .$$

De plus, on voit grâce à (20) et (24) que $\mathcal{C}(F)$ est colibre. Dualelement, l'algèbre de Lie motivique $\mathfrak{u}(F)$ est libre et ses indécomposables en poids $-n \leq -1$ sont donnés par l'espace $K_{2n-1}(F)_{\mathbb{Q}}^\vee$.

Dans le paragraphe suivant on explique comment penser au régulateur dans le cadre du formalisme tannakien.

2.3. Réalisation de Hodge et régulateur

Soit F un corps de nombres. On a pour tout plongement $\sigma : F \rightarrow \mathbb{C}$ un foncteur de réalisation de Hodge $\mathrm{MT}(F) \rightarrow \mathrm{MHS}$ vers la catégorie des structures de Hodge mixtes rationnelles, qui factorise les foncteurs de réalisation $\omega_{\mathbb{B}}, \omega_{\mathrm{dR}}, \omega$. Il induit pour tout $n \geq 1$ un morphisme au niveau des groupes d'extensions

$$(26) \quad \mathrm{Ext}_{\mathrm{MT}(F)}^1(\mathbb{Q}(-n), \mathbb{Q}(0)) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathrm{MHS}}^1(\mathbb{Q}(-n), \mathbb{Q}(0)) \simeq \mathbb{C}/(2i\pi)^n \mathbb{Q} .$$

Rappelons qu'un nombre complexe $a \in \mathbb{C}/(2i\pi)^n \mathbb{Q}$ correspond par ce dernier isomorphisme à la structure de Hodge mixte dont une matrice des périodes est

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & (2i\pi)^n \end{pmatrix} ,$$

où la deuxième colonne donne la position de la filtration de Hodge dans une base rationnelle compatible à la filtration par le poids. Le motif de Kummer $K(x)$ donne lieu à une structure de Hodge mixte pour laquelle

$$(27) \quad a = \int_1^z \frac{dt}{t} = \log(z) \in \mathbb{C}/2i\pi \mathbb{Q} ,$$

avec $z = \sigma(x)$.

Si l'on somme (26) sur tous les plongements complexes de F , on obtient en tensorisant par \mathbb{R} à l'arrivée et en utilisant (8) et (22) un morphisme

$$(28) \quad \varpi_n : K_{2n-1}(F)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{R}^{d_n}$$

qu'on peut appeler *régulateur de Hodge*. On devrait avoir l'égalité $\varpi_n = \rho_n$ avec le régulateur de Borel, mais ce résultat ne semble pas être dans la littérature.

Le point de vue de la réalisation de Hodge fournit en fait plus que le régulateur (28) : on a pour tout entier n un morphisme

$$\varpi_n : \mathcal{C}_n(F) \longrightarrow \mathbb{R}^{d_n}$$

qui induit (28) en restriction au noyau du cocrochet δ , isomorphe à $K_{2n-1}(F)_{\mathbb{Q}}$ via (25). Il apparaît chez GONCHAROV (1999) sous le nom de morphisme des *périodes réelles* ou *Lie-périodes* (voir aussi BROWN (2014) pour une interprétation tannakienne comme variante du morphisme des *périodes univaluées*). Explicitons sa définition en suivant BEILINSON et DELIGNE (1994). Représentons un élément de $\mathcal{C}_n(F)$ par un coefficient matriciel (M, v, φ) . Pour un plongement $\sigma : F \rightarrow \mathbb{C}$, soit P une matrice des périodes de M (matrice de l'isomorphisme naturel $\omega(M) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq \omega_{\mathrm{dR}}(M) \otimes_F \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \omega_{\mathbb{B}}(M) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$). Si D désigne la matrice diagonale qui agit par $(-1)^k$ en poids k , le produit $D\bar{P}^{-1}P$ est alors une matrice unipotente. La composante de $\varpi_n(M, v, \varphi)$ correspondant au plongement σ est alors l'accouplement

$$\langle \varphi, \frac{1}{2} \log(D\bar{P}^{-1}P)v \rangle .$$

Par exemple, $\varpi_1(\log^{\mathcal{C}}(x))$ a pour composantes les $\log|\sigma(x)|$.

3. LA CONJECTURE DE ZAGIER DANS LE CONTEXTE MOTIVIQUE

On passe maintenant à l'interprétation motivique de la conjecture de Zagier, d'après BEILINSON et DELIGNE (1994) et GONCHAROV (1994, 1995a). En suivant Goncharov, on arrivera naturellement à l'énoncé de la *conjecture de liberté* sur la structure de la cogèbre de Lie motivique.

3.1. Motifs polylogarithmiques et polylogarithmes motiviques

On dispose pour tout $x \in F^\times$ d'un *motif polylogarithmique* $L(x)$, qui est un ind-objet de $\text{MT}(F)$ tel que $\text{gr}_{2k}^W L(x) \simeq \mathbb{Q}(-k)$ pour tout entier naturel k . Une matrice de périodes de $W_{2n}L(x)$, relative à un plongement $\sigma : F \rightarrow \mathbb{C}$, est de la forme suivante, où l'on note $z = \sigma(x)$.

$$(29) \quad \begin{pmatrix} 1 & \text{Li}_1(z) & \text{Li}_2(z) & \text{Li}_3(z) & \cdots & \text{Li}_n(z) \\ & 2i\pi & 2i\pi \log(z) & 2i\pi \frac{\log^2(z)}{2} & \cdots & 2i\pi \frac{\log^{n-1}(z)}{(n-1)!} \\ & & (2i\pi)^2 & (2i\pi)^2 \log(z) & \cdots & (2i\pi)^2 \frac{\log^{n-2}(z)}{(n-2)!} \\ & & & (2i\pi)^3 & & \\ & & & & & \vdots \\ & & 0 & & \ddots & \\ & & & & & (2i\pi)^n \end{pmatrix}$$

(Si $x = 1$, $\text{Li}_1(z)$ n'est pas défini et doit être remplacé par 0 dans cette matrice.) L'apparition de $\text{Li}_n(z)$ dans une matrice des périodes s'explique par la formule intégrale suivante, valable pour $z \notin]1, +\infty[$:

$$\text{Li}_n(z) = \int_{0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq 1} \frac{z dt_1 \cdots dt_n}{(1 - zt_1)t_2 \cdots t_n} .$$

Pour tout entier $n \geq 1$, le motif polylogarithmique donne lieu, via les isomorphismes $\text{gr}_0^W L(x) \simeq \mathbb{Q}(0)$ et $\text{gr}_{2n}^W L(x) \simeq \mathbb{Q}(-n)$, à un coefficient matriciel noté

$$(30) \quad \text{Li}_n^{\mathcal{C}}(x) \in \mathcal{C}_n(F)$$

et appelé *polylogarithme motivique*. La structure très simple de $L(x)$, reflétée dans la structure par blocs de la matrice (29), permet de calculer son cocrochet, donné pour $n \geq 2$ par la formule :

$$(31) \quad \delta \text{Li}_n^{\mathcal{C}}(x) = \text{Li}_{n-1}^{\mathcal{C}}(x) \wedge \log^{\mathcal{C}}(x) .$$

Notons que $\delta \text{Li}_n^{\mathcal{C}}(x)$ a seulement une composante non nulle dans $\mathcal{C}_{n-1}(F) \wedge \mathcal{C}_1(F)$. Si F est un corps de nombres, un calcul rapide utilisant (29) montre qu'on a l'égalité au niveau des régulateurs de Hodge :

$$(32) \quad \varpi_n(\text{Li}_n^{\mathcal{C}}(x)) = \text{P}_n^F(x) .$$

Cela justifie le choix de P_n comme version univaluée de Li_n .

Remarque 3.1. — C'est l'équation (32) qui justifie l'appellation *polylogarithme motivique* pour l'élément $\mathrm{Li}_n^{\mathcal{C}}(x)$. Il existe dans la littérature des variantes de cette construction qui portent le même nom et jouent des rôles différents, mais qui ont en commun de venir de coefficients matriciels dans une catégorie tannakienne de motifs (comme $\mathrm{MT}(F)$) ou de systèmes de réalisations (structures de Hodge mixtes, etc.). Par exemple, on peut considérer une version $\mathrm{Li}_n^{\mathcal{H}}(x)$ dans l'algèbre de Hopf motivique $\mathcal{H}(F)$, dont $\mathrm{Li}_n^{\mathcal{C}}(x)$ est la version modulo produits. On en déduit par itération maximale du coproduit (réduit) le *symbole* de $\mathrm{Li}_n(x)$, qui est égal à $\mathrm{Li}_n^{\mathcal{S}}(x) = -(1-x) \otimes x \otimes \cdots \otimes x$ et vit dans $(\mathcal{H}_1(F))^{\otimes n} = (F_{\mathbb{Q}}^{\times})^{\otimes n}$. Une autre variante, plus proche de la notion de période, est de considérer l'algèbre des périodes motiviques, relative à un plongement complexe de F , notée $\mathcal{P}(F) = \mathcal{O}(\mathrm{Isom}_{\mathrm{MT}(F)}^{\otimes}(\omega_{\mathrm{dR}}, \omega_{\mathrm{B}}))$, dont les éléments sont représentés par des coefficients matriciels (M, α, τ) avec $M \in \mathrm{MT}(F)$, $\alpha \in \omega_{\mathrm{dR}}(M)$ et $\tau \in \omega_{\mathrm{B}}(M)^{\vee}$. Cette algèbre est munie d'un morphisme d'algèbres vers \mathbb{C} , le *morphisme des périodes*, et on peut relever (une détermination de) $\mathrm{Li}_n(x) \in \mathbb{C}$ en un élément $\mathrm{Li}_n^{\mathcal{P}}(x) \in \mathcal{P}(F)$. Cette dernière construction faisant intervenir la réalisation de Betti en plus de la réalisation de de Rham (ou ω -réalisation), elle permet de prendre en compte le caractère multivalué de la fonction Li_n . On renvoie le lecteur à l'article de survol de BROWN (2017) pour un tour d'horizon de ces notions.

Remarque 3.2. — À bien des égards, les relations entre polylogarithmes motiviques (et plus généralement entre périodes motiviques) se prouvent comme les relations entre polylogarithmes, c'est-à-dire par différentiation, où le cocrochet joue le rôle de la différentielle. Soit B un ouvert non vide de $\mathbb{A}_F^1 = \mathrm{Spec}(F[t])$. Par localisation, la K -théorie de B , définie comme la K -théorie de l'anneau des fonctions $\mathcal{O}(B)$, s'exprime en termes de la K -théorie de F et de ses extensions finies. Par le théorème de Borel, on dispose donc si F est un corps de nombres d'une catégorie $\mathrm{MT}(B)$ de motifs de Tate mixtes (ou faisceaux motiviques de Tate mixtes) sur B , et on montre que le morphisme structurel $B \rightarrow \mathrm{Spec}(F)$ induit un isomorphisme

$$(33) \quad \mathrm{Ext}_{\mathrm{MT}(F)}^1(\mathbb{Q}(-n), \mathbb{Q}(0)) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathrm{MT}(B)}^1(\mathbb{Q}(-n), \mathbb{Q}(0))$$

pour tout $n \geq 2$ (phénomène de *rigidité*). Soit $\xi(t) \in \mathbb{Q}[\mathcal{O}(B)^{\times}]$ tel que $\delta(\mathrm{Li}_n^{\mathcal{C}}(\xi(t))) = 0$, avec $n \geq 2$. Alors par (33) on voit que $\mathrm{Li}_n^{\mathcal{C}}(\xi(t))$ est indépendant de t , et il suffit de spécialiser t en un point rationnel de B pour trouver la constante. Si $F = \mathbb{Q}$ et n est pair, l'annulation de $K_{2n-1}(\mathbb{Q})_{\mathbb{Q}}$ implique que la constante est nécessairement zéro. En travaillant avec des variations de structures de Hodge mixtes on peut traiter le cas de bases plus générales (voir par exemple GONCHAROV (2002)).

Remarque 3.3. — Dans l'esprit de la remarque précédente, on peut voir Li_n comme un motif de Tate mixte sur la base $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. En réalisation de Hodge, on obtient une variation de structures de Hodge mixtes sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ étudiée par HAIN (1994) (le système local sous-jacent avait été calculé par RAMAKRISHNAN (1982)). La présence d'une connexion (de Gauss–Manin) dans ce formalisme explique la ressemblance formelle entre l'équation différentielle (14) et l'expression du cocrochet (31).

3.2. Interprétation motivique de la conjecture de Zagier

Le raisonnement de la remarque 3.2 implique que le morphisme

$$\iota_n : \mathcal{B}_n(F) \rightarrow \mathcal{C}_n(F), [x]_n \mapsto \text{Li}_n^{\mathcal{C}}(x)$$

est bien défini pour tout $n \geq 2$. De plus, la formule (31) implique que $\log^{\mathcal{C}} : F_{\mathbb{Q}}^{\times} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_1(F)$ et ι_2, \dots, ι_n s'assemblent en un morphisme de complexes

$$\iota^{\bullet}(n) : \mathcal{B}^{\bullet}(F, n) \longrightarrow \text{CE}^{\bullet}(\mathcal{C}(F))_n.$$

On obtient donc, au niveau des H^1 , un morphisme

$$\psi_n : \ker(\delta_n) \longrightarrow \ker(\delta : \mathcal{C}_n(F) \rightarrow (\Lambda^2 \mathcal{C}(F))_n).$$

Si F est un corps de nombres, on a donc grâce à (25) et (32) le diagramme commutatif suivant :

$$(34) \quad \begin{array}{ccc} \ker(\delta_n) & \xrightarrow{\psi_n} & K_{2n-1}(F)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\varpi_n} \mathbb{R}^{d_n} \\ & \searrow & \nearrow \\ & & \mathbb{P}_n^F \end{array}$$

La ressemblance formelle avec le diagramme (13) ne doit pas tromper le lecteur sur le fait que ψ_n va dans le sens opposé à φ_n ! L'existence du diagramme (34) n'est pas suffisante pour prouver la conjecture de Zagier, qui serait une conséquence de la conjecture suivante (et de l'égalité des régulateurs $\varpi_n = \rho_n$).

CONJECTURE 3.4. — *Le morphisme ψ_n est surjectif.*

En effet, (10) découle alors de (12) et (34) en prenant pour $(\xi_j)_{1 \leq j \leq d_n}$ des antécédents par ψ_n d'une base de $K_{2n-1}(F)_{\mathbb{Q}}$.

Remarque 3.5. — Le diagramme (34) a été construit par BEILINSON et DELIGNE (1994) en supposant l'existence du formalisme motivique, et indépendamment par DE JEU (1995). En fait, Beilinson–Deligne comme de Jeu rendent ι_n et donc ψ_n injectifs en remplaçant l'espace $\mathcal{R}_n(F)$ des relations polylogarithmiques par l'espace des relations satisfaites par les $\text{Li}_n^{\mathcal{C}}(x)$.

Remarque 3.6. — Via le dictionnaire tannakien, la conjecture 3.4 affirme que toutes les extensions de $\mathbb{Q}(-n)$ par $\mathbb{Q}(0)$ dans $\text{MT}(F)$ se trouvent dans la sous-catégorie tannakienne engendrée par les motifs polylogarithmiques $L(x)$ pour $x \in F^{\times}$.

Il est important de noter que le morphisme $\iota_n : \mathcal{B}_n(F) \rightarrow \mathcal{C}_n(F)$ lui-même n'est pas surjectif pour $n \geq 4$ (c'est-à-dire que les motifs polylogarithmiques n'engendrent pas la catégorie tannakienne $\text{MT}(F)$). En effet, on peut par exemple produire des éléments de $\mathcal{C}_4(F)$ dont le cocrochet a une composante non nulle dans $\mathcal{C}_2(F) \wedge \mathcal{C}_2(F)$. C'est ce phénomène qui rend le cas $n = 4$ de la conjecture de Zagier si crucial dans la perspective du cas général.

3.3. La conjecture de liberté

3.3.1. Énoncé. — La conjecture suivante de GONCHAROV (1994, 1995a) renforce la conjecture 3.4 de manière cohérente avec la conjecture 1.11.

CONJECTURE 3.7. — *Pour tout $n \geq 1$, le morphisme de complexes $\iota^\bullet(n)$ est un quasi-isomorphisme.*

On l'appelle *conjecture de liberté* à cause de la formulation équivalente suivante.

CONJECTURE 3.8. — (i) *La cogèbre de Lie quotient $\mathcal{C}(F)/\mathcal{C}_1(F)$ est colibre.*

(ii) *Pour tout $n \geq 2$, le morphisme ι_n est injectif et identifie $\mathcal{B}_n(F)$ avec l'espace des primitifs de $\mathcal{C}(F)/\mathcal{C}_1(F)$ en poids n .*

Dualement, cette conjecture affirme que la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{u}(F)_{\leq -2}$ de l'algèbre de Lie motivique $\mathfrak{u}(F)$ est libre et que ses indécomposables en poids $-n \leq -2$ sont donnés par l'espace $\mathcal{B}_n(F)^\vee$. Si F est un corps de nombres, on a vu que l'algèbre de Lie motivique $\mathfrak{u}(F)$ est libre et il en est donc de même pour $\mathfrak{u}(F)_{\leq -2}$, ce qui règle le point (i).

Remarque 3.9. — La conjecture de liberté peut être séparée en deux énoncés relativement indépendants. D'une part, l'injectivité de ι_n revient à dire que les seules relations satisfaites par les polylogarithmes multiples motiviques $\mathrm{Li}_n^{\mathcal{C}}(x)$ sont celles prévues par l'espace des relations polylogarithmiques $\mathcal{R}_n(F)$. D'autre part, l'enjeu est de préciser la place des polylogarithmes motiviques à l'intérieur de la cogèbre de Lie motivique ; la conjecture implique notamment qu'on peut identifier via ι_n :

$$(35) \quad \mathcal{B}_n(F) \stackrel{?}{=} \{ \alpha \in \mathcal{C}_n(F) \mid \delta\alpha \in \mathcal{C}_{n-1}(F) \wedge \mathcal{C}_1(F) \} .$$

3.3.2. La conjecture de liberté en bas poids. — Explicitons la conjecture de liberté en poids $n = 2, 3, 4$.

— En poids 2 elle affirme que $\iota_2 : \mathcal{B}_2(F) \rightarrow \mathcal{C}_2(F)$ est un isomorphisme. Ce résultat est connu si F est un corps de nombres comme sous-produit de la preuve de la conjecture de Zagier pour $n = 2$ et des travaux de Suslin (voir la remarque 1.12).

— En poids 3 elle affirme que $\iota_3 : \mathcal{B}_3(F) \rightarrow \mathcal{C}_3(F)$ est un isomorphisme ; même dans le cas d'un corps de nombres, on ne sait prouver ni l'injectivité ni la surjectivité.

— En poids 4 elle prend la forme d'une suite exacte courte

$$(36) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{B}_4(F) \xrightarrow{\iota_4} \mathcal{C}_4(F) \xrightarrow{\delta_{2,2}} \mathcal{C}_2(F) \wedge \mathcal{C}_2(F) \longrightarrow 0 .$$

On sait seulement montrer que $\delta_{2,2}$ est surjectif si F est un corps de nombres (voir §5.1 plus bas).

3.4. Une stratégie vers la conjecture de Zagier, version raffinée

Le diagramme (34) semble être l'*habitat naturel* de la conjecture de Zagier, et la conjecture 3.4 (surjectivité de ψ_n) semble être plus fondamentale que la conjecture 1.5, qui nécessite d'inventer un morphisme φ_n (conjecturalement une section de ψ_n) en découvrant des relations polylogarithmiques — la conjecture 3.4 n'étant pas concernée par ces relations. Malheureusement, cette approche « naturelle » à la conjecture de Zagier n'a pas encore porté ses fruits. L'obstacle principal est que la définition des motifs de Tate mixtes est si peu explicite qu'on ne sait pas très bien dire « à quoi ressemble » un élément de $\mathcal{C}_n(F)$.

Malgré ce constat, le point de vue motivique permet de raffiner la stratégie vers la conjecture de Zagier en mettant en lumière le rôle central joué par la cogèbre de Lie motivique. Il semble en effet plus raisonnable de chercher à définir un morphisme de la K -théorie vers (les éléments primitifs de) $\mathcal{C}(F)$, et de s'en remettre à la conjecture de liberté pour en déduire une flèche vers $\mathcal{B}(F)$ comme dans la conjecture 1.5.

La conjecture de liberté étant présentement hors de portée, on procède via des remplacements « symboliques » des espaces \mathcal{B}_n et \mathcal{C}_n , qu'on note B_n et C_n , et qui sont définis par générateurs et relations *explicites*, avec la même structure abstraite (crochets) que leurs versions calligraphiques et des morphismes $B \rightarrow \mathcal{B}$ et $C \rightarrow \mathcal{C}$ (dont on peut conjecturer qu'ils sont des isomorphismes). Il faut penser à $B_n(F)$ comme à un remplacement de $\mathcal{B}_n(F)$ où les relations polylogarithmiques inexplicites $\mathcal{R}_n(F)$ sont remplacées par des familles explicites de relations. Le groupe $C_n(F)$ joue un rôle similaire mais incorpore la structure motivique de tous les polylogarithmes *multiples*, qu'on étudiera au prochain paragraphe. La structure conjecturale de la cogèbre de Lie motivique joue un rôle de guide et suggère une stratégie vers la conjecture de Zagier découpée en deux étapes relativement indépendantes :

1) La première étape consiste à construire un morphisme

$$K_{2n-1}(F)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow H^1(\mathrm{CE}^{\bullet}(C(F))_n) = \ker \left(\delta : C_n(F) \rightarrow (\Lambda^2 C(F))_n \right)$$

à partir d'un morphisme de complexes

$$(37) \quad BG^{\bullet}(F, n) \longrightarrow \mathrm{CE}^{\bullet}(C(F))_n$$

comme au §1.7. Les techniques générales développées par Goncharov permettent de démontrer la compatibilité souhaitée entre le régulateur de Borel et le régulateur de Hodge induit sur $C_n(F)$ via le morphisme vers $\mathcal{C}_n(F)$. On obtient comme corollaire de cette première étape une version « faible » de la conjecture de Zagier, où les polylogarithmes classiques sont remplacés par les polylogarithmes multiples. GONCHAROV (2005b) a apporté une contribution importante dans cette direction en décrivant le régulateur de Borel via une fonction appelée polylogarithme grassmannien (univalué). CHARLTON, GANGL et RADCHENKO (2019) donnent une formule pour une variante multivaluée de cette fonction, due à GONCHAROV (2013), en termes de polylogarithmes multiples. En principe, la marche à suivre est donc d'étendre ces

formules en un morphisme de complexes (37). Nous ne rentrerons pas dans les détails de cette partie du travail de GONCHAROV et RUDENKO (2018), dans le cas $n = 4$, qui s’appuie notamment sur des travaux antérieurs de GONCHAROV (2000).

- 2) La deuxième étape consiste à prouver une version « symbolique » de la conjecture de liberté, c’est-à-dire à démontrer que le morphisme naturel $B^\bullet(F, n) \rightarrow \text{CE}^\bullet(F, n)$ est un quasi-isomorphisme⁽¹⁰⁾. Pour $n = 4$, cette tâche a été accomplie par GANGL (2016) et GONCHAROV et RUDENKO (2018), et nous en décrivons les grandes lignes après un interlude sur les polylogarithmes multiples dans le contexte motivique.

4. POLYLOGARITHMES MULTIPLES MOTIVIQUES ET PROFONDEUR

On explique maintenant comment définir des versions motiviques des polylogarithmes multiples dans la cogèbre de Lie motivique,

$$\text{Li}_{n_1, \dots, n_r}^{\mathcal{C}}(x_1, \dots, x_r) \in \mathcal{C}_{n_1 + \dots + n_r}(F),$$

pour des entiers $n_1, \dots, n_r \geq 1$ et des éléments $x_1, \dots, x_r \in F^\times$. Ils sont définis comme des coefficients matriciels d’un motif de Tate mixte sur F appelé *groupe fondamentale motivique*, ce qui reflète l’interprétation des polylogarithmes multiples comme intégrales itérées. Le concept de profondeur (l’entier r) fera l’objet d’une discussion particulière. On introduit aussi certaines variantes, les *corrélateurs*, en suivant GONCHAROV (2019).

4.1. Intégrales itérées

Pour une variété différentielle X , des 1-formes différentielles $\omega_1, \dots, \omega_n$ sur X , et un chemin lisse $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$, on définit l’*intégrale itérée*

$$\int_{\gamma} \omega_1 \cdots \omega_n = \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1} f_1(t_1) dt_1 \cdots f_n(t_n) dt_n$$

où l’on a noté $f_i(t)dt$ le tiré en arrière de ω_i par γ . Cela généralise le concept classique d’intégrale d’une 1-forme le long d’un chemin à des mots formés de 1-formes.

Dans le cas où $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{a_1, \dots, a_n, \infty\}$ est la droite projective époincée, on note, pour des points-base $a_0, a_{n+1} \in X$,

$$(38) \quad \text{I}(a_0; a_1, \dots, a_n; a_{n+1}) = \int_{a_0}^{a_{n+1}} \frac{dt}{t - a_1} \cdots \frac{dt}{t - a_n}$$

qui dépend d’un choix de chemin de a_0 vers a_{n+1} dans X . On peut étendre cette définition au cas où a_0, a_{n+1} sont « à l’infini » dans X , c’est-à-dire parmi a_1, \dots, a_n, ∞ . Dans ce cas-là l’intégrale itérée peut diverger (ce qui est le cas si et seulement si $a_0 = a_1$ ou $a_n = a_{n+1}$) et on fixe des vecteurs tangents à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ en a_0 et a_{n+1} (qui sont alors appelés *points-base tangentiels*) pour la régulariser. Il est alors naturel de considérer

10. Pour l’application à la conjecture de Zagier, on a seulement besoin de montrer qu’il induit un isomorphisme au niveau des H^1 .

des chemins $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ qui partent de a_0 et arrivent en a_{n+1} avec des vecteurs vitesse égaux aux vecteurs tangents prescrits, et sont tels que $\gamma(t) \in X$ pour $0 < t < 1$.

Pour des entiers $n_1, \dots, n_r \geq 1$ et des nombres complexes non nuls a_1, \dots, a_r on note

$$I_{n_1, \dots, n_r}(a_1, \dots, a_r; a_{r+1}) = (-1)^r I(0; a_1, \{0\}^{n_1-1}, a_2, \{0\}^{n_2-1}, \dots, a_r, \{0\}^{n_r-1}; a_{r+1})$$

où $\{0\}^k$ désigne une liste de 0 de longueur k . Cette notation est abusive et dépend du choix d'un chemin de 0 à a_{r+1} . Dans le cas divergent ($n_r = 1, a_r = a_{r+1}$) la convention est de régulariser l'intégrale itérée via le vecteur tangent a_{r+1} en a_{r+1} , de sorte que $I_1(a; a) = 0$.

Un calcul rapide montre que les polylogarithmes multiples s'expriment en termes d'intégrales itérées sous la forme :

$$\text{Li}_{n_1, \dots, n_r}(x_1, \dots, x_r) = I_{n_1, \dots, n_r}(1, x_1, x_1 x_2, \dots, x_1 x_2 \cdots x_{r-1}; x_1 x_2 \cdots x_r),$$

ou réciproquement :

$$I_{n_1, \dots, n_r}(a_1, \dots, a_r; a_{r+1}) = \text{Li}_{n_1, \dots, n_r}\left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \dots, \frac{a_{r+1}}{a_r}\right).$$

4.2. Groupoïdes fondamentaux motiviques et polylogarithmes multiples motiviques

Soit F un corps de nombres pour lequel on fixe un plongement complexe. Soit $S \subset \mathbb{P}^1(F)$ un ensemble fini contenant ∞ , et notons $X = \mathbb{P}_F^1 \setminus S$. On fixe un ensemble fini de points-base (éventuellement tangentiels) sur X , définis sur F . On note $\pi_1^{\text{uni}}(X(\mathbb{C}))$ la *complétion pro-unipotente* (ou *de Malcev*) du groupoïde fondamental topologique de $X(\mathbb{C})$ relatif au choix de points-base, qui est un schéma en groupoïdes défini sur \mathbb{Q} qui factorise les représentations unipotentes de $\pi_1(X(\mathbb{C}))$. Les intégrales itérées donnent lieu, d'après CHEN (1977), à un isomorphisme :

$$(39) \quad T(H_{\text{dR}}^1(X)) \otimes_F \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\pi_1^{\text{uni}}(X(\mathbb{C}))_{a,b}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C},$$

où $T(V)$ désigne l'algèbre tensorielle sur V et la flèche associée à un mot $\omega_1 \cdots \omega_n$ la fonction d'intégration $\gamma \mapsto \int_{\gamma} \omega_1 \cdots \omega_n$ définie sur les chemins γ de a à b dans $X(\mathbb{C})$. On peut, d'après DELIGNE (1989), GONCHAROV (2001b, 2005a) et DELIGNE et GONCHAROV (2005), voir (39) comme l'isomorphisme des périodes d'un ind-objet de la catégorie $\text{MT}(F)$, noté $\mathcal{O}(\pi_1^{\text{mot}}(X)_{a,b})$. En réalisation de Hodge cette construction remonte aux travaux de MORGAN (1978) et HAIN (1987).

En ω -réalisation, le \mathbb{Q} -espace vectoriel $\text{Hom}_{\text{MT}(F)}(\mathbb{Q}(-k), \text{gr}_{2k}^W \mathcal{O}(\pi_1^{\text{mot}}(X)_{a,b}))$ est indépendant de a, b et a une base formée des mots de longueur k en les $dt/(t-s)$, pour $s \in S \setminus \{\infty\}$. On a donc un isomorphisme canonique $\text{gr}_0^W \mathcal{O}(\pi_1^{\text{mot}}(X)_{a,b}) \rightarrow \mathbb{Q}(0)$, et l'intégrande de (38) permet de définir un coefficient matriciel

$$I^{\mathcal{C}}(a_0; a_1, \dots, a_n; a_{n+1}) \in \mathcal{C}_n(F),$$

pour tous les $a_0, \dots, a_{n+1} \in F$, qui ne dépend pas de choix de chemin de a_0 à a_{n+1} , et ne dépend de choix de vecteurs tangents en a_0 et a_{n+1} que si $n = 1$. Par les formules

du paragraphe précédent, on obtient aussi des éléments

$$(40) \quad I_{n_1, \dots, n_r}^{\mathcal{C}}(a_1, \dots, a_r; a_{r+1}) \in \mathcal{C}_{n_1 + \dots + n_r}(F) \quad \text{et} \quad \text{Li}_{n_1, \dots, n_r}^{\mathcal{C}}(x_1, \dots, x_r) \in \mathcal{C}_{n_1 + \dots + n_r}(F),$$

associés à a_1, \dots, a_{r+1} ou x_1, \dots, x_r dans F^\times . Ils généralisent (30) et on les appelle *polylogarithmes multiples motiviques* (dans leur version modulo produits). La conjecture suivante est due à GONCHAROV (1995b).

CONJECTURE 4.1. — *Les polylogarithmes multiples motiviques (40) engendrent la cogèbre de Lie motivique $\mathcal{C}(F)$.*

Via le dictionnaire tannakien, cette conjecture affirme que la catégorie tannakienne $\text{MT}(F)$ est engendrée par les ind-objets $\mathcal{O}(\pi_1^{\text{mot}}(\mathbb{P}_F^1 \setminus S)_{a,b})$, pour $S \subset \mathbb{P}^1(F)$ un sous-ensemble fini contenant ∞ et a, b des points-base (éventuellement tangentiels) définis sur F .

Remarque 4.2. — Parmi les progrès vers cette conjecture, citons le théorème de BROWN (2012) selon lequel l'objet $\mathcal{O}(\pi_1^{\text{mot}}(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}))$, avec points-base tangentiels adéquats, engendre la catégorie $\text{MT}(\mathbb{Z}) \subset \text{MT}(\mathbb{Q})$ des motifs de Tate mixtes sur \mathbb{Z} , et les résultats antérieurs de DELIGNE (2010) dans le cas de certains corps cyclotomiques. Dans une autre direction, BÖHM (1964) montre que tous les volumes de polytopes hyperboliques s'expriment en termes de polylogarithmes multiples (voir RUDENKO (2020)).

GONCHAROV (2001a, 2005a) montre que le crochet des polylogarithmes multiples motiviques est calculé par la jolie formule suivante⁽¹¹⁾, qui généralise (31) :

$$(41) \quad \begin{aligned} & \delta I^{\mathcal{C}}(a_0; a_1, \dots, a_n; a_{n+1}) \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq n} I^{\mathcal{C}}(a_0; a_1, \dots, a_i, a_{j+1}, \dots, a_n; a_{n+1}) \wedge I^{\mathcal{C}}(a_i; a_{i+1}, \dots, a_{j-1}; a_j). \end{aligned}$$

4.3. La conjecture de profondeur

On définit de manière récursive une filtration croissante D (par la *profondeur*) sur la cogèbre de Lie motivique, en posant $D_{-1}\mathcal{C}(F) = 0$, $D_0\mathcal{C}(F) = \mathcal{C}_1(F)$ et pour $k \geq 1$,

$$D_k\mathcal{C}(F) = \{\alpha \in \mathcal{C}(F) \mid \delta\alpha \in \mathcal{C}_1(F) \wedge \mathcal{C}(F) + D_{k-1}\mathcal{C}(F) \wedge D_{k-1}\mathcal{C}(F)\}.$$

Il s'agit d'une filtration exhaustive : pour tout entier n on a

$$(42) \quad \mathcal{C}_n(F) = D_{\lfloor n/2 \rfloor} \mathcal{C}_n(F).$$

Cette définition est plus claire dans le contexte dual de l'algèbre de Lie motivique : la filtration (décroissante) duale est donnée par $D^0\mathbf{u}(F) = \mathbf{u}(F)$, $D^1\mathbf{u}(F) = \mathbf{u}_{\leq -2}(F)$, et pour tout $k \geq 2$, $D^k\mathbf{u}(F) = [\mathbf{u}_{\leq -2}(F), D^{k-1}\mathbf{u}(F)]$.

La filtration par la profondeur est compatible avec la notion de profondeur des polylogarithmes multiples, au sens où on a $\text{Li}_{n_1, \dots, n_r}^{\mathcal{C}}(x_1, \dots, x_r) \in D_r\mathcal{C}(F)$ pour tous les $x_1, \dots, x_r \in F^\times$, comme on peut le voir en utilisant (41). La conjecture suivante

11. Le lecteur attentif remarquera que certains termes du membre de droite peuvent dépendre de choix de vecteurs tangents en a_1, \dots, a_n , même si la somme n'en dépend pas.

de GONCHAROV (2001a), appelée *conjecture de profondeur*, raffine la conjecture 4.1 et précise la place des polylogarithmes multiples motiviques dans la cogèbre de Lie motivique.

CONJECTURE 4.3. — *Soit un entier $k \geq 1$. Les polylogarithmes multiples motiviques $\mathrm{Li}_{n_1, \dots, n_r}^{\mathcal{C}}(x_1, \dots, x_r)$, pour $r \leq k$, engendrent $D_k \mathcal{C}(F)$.*

Pour $k = 1$ on retrouve (35). Le théorème suivant a été prouvé récemment par RUDENKO (2020) et constitue un premier pas vers la conjecture de profondeur, au vu de (42).

THÉORÈME 4.4. — *Tout polylogarithme multiple motivique de poids $n \geq 2$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de polylogarithmes multiples motiviques $\mathrm{Li}_{n_1, \dots, n_r}^{\mathcal{C}}(x_1, \dots, x_r)$ avec $r \leq \lfloor n/2 \rfloor$.*

On peut enlever le mot « motivique » de cet énoncé quitte à travailler modulo des produits de polylogarithmes multiples de poids inférieur. Ce théorème est une amélioration notable de l'état antérieur des connaissances, où la borne $\lfloor n/2 \rfloor$ était remplacée par $\max\{1, n - 2\}$.

4.4. Corrélateurs

GONCHAROV (2019) a introduit une manière d'organiser les polylogarithmes multiples motiviques sous une forme plus symétrique (au sens de la symétrie cyclique voire diédrale) qui semble bien adaptée à l'étude des relations. Les objets centraux sont appelés *corrélateurs motiviques*.

4.4.1. *Produit et crochet d'Ihara.* — Soit $S \subset \mathbb{P}^1(F)$ un ensemble fini contenant ∞ , et notons $S \setminus \{\infty\} = \{s_1, \dots, s_N\}$. On fait le choix d'un vecteur tangent à \mathbb{P}_F^1 en chaque point de S et on considère le groupoïde fondamental motivique $\pi_1^{\mathrm{mot}}(\mathbb{P}_F^1 \setminus S)$ relatif à ce choix de points-base. On note Π sa ω -réalisation, qui est un schéma en groupoïdes défini sur \mathbb{Q} . Par le formalisme tannakien, il est muni d'une action du groupe tannakien $U(F)$, qui a d'abord été étudiée par IHARA (1989) dans le cadre des représentations galoisiennes. Notons d'abord que le groupoïde Π est constant : pour une \mathbb{Q} -algèbre R et $a, b \in S$, $\Pi_{a,b}(R)$ est canoniquement isomorphe au groupe des séries non commutatives « group-like » en N variables X_1, \dots, X_N :

$$\Pi_{a,b}(R) = \{F \in R\langle\langle X_1, \dots, X_N \rangle\rangle, \Delta(F) = F \otimes F\},$$

où le coproduit (complété) Δ est déterminé par $\Delta(1) = 1 \otimes 1$ et $\Delta(X_i) = 1 \otimes X_i + X_i \otimes 1$. Cependant, l'action de $U(F)$ sur $\Pi_{a,b}$ est sensible aux points-base a, b .

Soit A le schéma en groupes dont les points sont les automorphismes du groupoïde Π qui agissent trivialement sur $\exp(X_i) \in \Pi_{s_i, s_i}$ pour tout $i = 1, \dots, N$ et sur $\exp(X_\infty) \in \Pi_{\infty, \infty}$, avec $X_\infty = -X_1 - \dots - X_N$. L'action de $U(F)$ sur Π se factorise par A et induit donc un morphisme de schémas en groupes $U(F) \rightarrow A$. L'évaluation en la série constante $1 \in \Pi_{\infty, s_i}$, pour $i = 1, \dots, N$, induit un isomorphisme de schémas $A \xrightarrow{\sim} P$ où P est le sous-schéma de $\Pi_{\infty, s_1} \times \dots \times \Pi_{\infty, s_N}$ formé des N -uplets (F_1, \dots, F_N) qui

vérifient $F_1 X_1 F_1^{-1} + \dots + F_N X_N F_N^{-1} = X_1 + \dots + X_N$. On a donc par transfert une loi de groupe sur P qu'on appelle *produit d'Ihara*.

Passons maintenant aux algèbres de Lie en notant $\mathfrak{a} = \text{Lie}(A)$ et $\mathfrak{p} = \text{Lie}(P)$. Cette dernière algèbre de Lie est l'espace des N -uplets (f_1, \dots, f_N) d'éléments de l'algèbre de Lie libre complétée $\widehat{\text{Lie}}(X_1, \dots, X_N)$ qui vérifient $[f_1, X_1] + \dots + [f_N, X_N] = 0$. Son crochet de Lie, noté $\{-, -\}$ et appelé *crochet d'Ihara*, est donné par la formule $\{f, g\} = \underline{h}$ avec

$$h_i = D_f(g_i) - D_g(f_i) - [f_i, g_i] ,$$

où l'on note D_f l'unique dérivation continue de $\widehat{\text{Lie}}(X_1, \dots, X_N)$ qui est telle que $D_f(X_i) = [f_i, X_i]$ pour tout $i = 1, \dots, N$.

4.4.2. Codage par des mots cycliques. — DRINFEL'D (1990) donne la description suivante de l'algèbre de Lie \mathfrak{p} . On voit \mathfrak{p} à l'intérieur de l'algèbre de Lie \mathfrak{q} , qui est définie de la même manière en permettant aux f_i d'être des séries non commutatives quelconques dans $\mathbb{Q}\langle\langle X_1, \dots, X_N \rangle\rangle$. Soit maintenant \mathfrak{cyc} l'espace des séries cycliques, c'est-à-dire invariantes par permutation circulaire des lettres à l'intérieur de chaque mot, qui ont un terme constant nul. Pour une série F on note $\partial_i F$ sa dérivée partielle par rapport à X_i , qui est donnée sur les mots par $\partial_i(X_i w) = w$ et $\partial_i(X_j w) = 0$ pour $j \neq i$. On a un isomorphisme $\mathfrak{cyc} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{q}$ donné par $F \mapsto (\partial_1 F, \dots, \partial_n F)$. On a donc le diagramme suivant d'algèbres de Lie :

$$(43) \quad \mathfrak{u}(F) \longrightarrow \mathfrak{a} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{p} \hookrightarrow \mathfrak{q} \xleftarrow{\sim} \mathfrak{cyc}$$

Pour décrire le crochet de Lie sur l'algèbre de Lie \mathfrak{cyc} il est plus commode de la voir comme le dual linéaire d'une cogèbre de Lie graduée \mathcal{Cyc} . Pour tout entier $n \geq 0$, une base de \mathcal{Cyc}_n est donnée par les mots de longueur $n + 1$ en X^1, \dots, X^N considérés modulo permutations circulaires des lettres à l'intérieur de chaque mot. Le cocrochet sur \mathcal{Cyc} est donné par

$$\delta(X^{i_0} \dots X^{i_n}) = \sum_{0 \leq j < k \leq n} (X^{i_j} \dots X^{i_k}) \wedge (X^{i_k} \dots X^{i_{j-1}}) .$$

On a donc, dualement à (43), un morphisme de cogèbres de Lie

$$(44) \quad \mathcal{Cyc} \rightarrow \mathcal{C}(F) .$$

On montre que ce morphisme ne dépend des choix des vecteurs tangents en les points-base s_1, \dots, s_N, ∞ qu'en poids 1.

4.4.3. Corrélateurs motiviques. — Soient $x_0, x_1, \dots, x_n \in F$ et appliquons la construction du paragraphe précédent à un ensemble $S \supset \{x_0, \dots, x_n\}$. En appliquant (44) au mot dont les lettres correspondent à x_0, \dots, x_n , on obtient un élément

$$\text{Cor}^{\mathcal{C}}(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{C}_n(F) ,$$

appelé *corrélateur motivique* par GONCHAROV (2019). On a la symétrie cyclique $\text{Cor}^{\mathcal{C}}(x_0, x_1, \dots, x_n) = \text{Cor}^{\mathcal{C}}(x_1, \dots, x_n, x_0)$ et la formule de cocrochet

$$(45) \quad \delta \text{Cor}^{\mathcal{C}}(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{0 \leq j < k \leq n} \text{Cor}^{\mathcal{C}}(x_j, \dots, x_k) \wedge \text{Cor}^{\mathcal{C}}(x_k, \dots, x_{j-1}),$$

qui peut être visualisée à l'aide de coupures dans un disque, comme dans la figure 1.

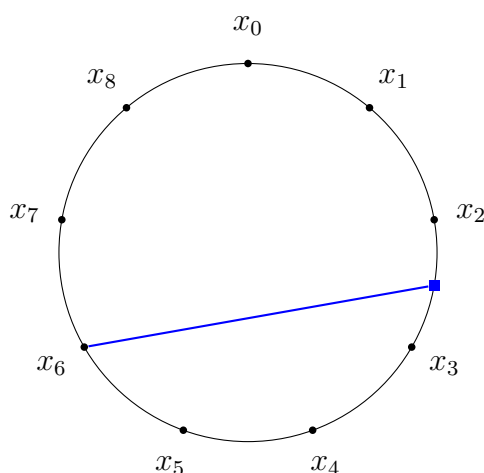


FIGURE 1. Pour $n = 8$, le terme dans la formule de cocrochet (45) correspondant à $(j, k) = (3, 6)$ est $\text{Cor}^{\mathcal{C}}(x_3, x_4, x_5, x_6) \wedge \text{Cor}^{\mathcal{C}}(x_6, x_7, x_8, x_0, x_1, x_2)$.

En poids 1 on a

$$\text{Cor}^{\mathcal{C}}(x_0, x_1) = \log^{\mathcal{C}}(x_1 - x_0)$$

si on fait le choix du vecteur tangent en ∞ qui est dual à $d(1/x)$. En poids 2 on a

$$\text{Cor}^{\mathcal{C}}(x_0, x_1, x_2) = \text{Li}_2^{\mathcal{C}}\left(\frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0}\right).$$

Remarque 4.5. — Goncharov donne une formule intégrale pour $\varpi_n(\text{Cor}^{\mathcal{C}}(x_0, \dots, x_n))$ et étudie des généralisations sur des courbes de genre supérieur qui devraient jouer un rôle dans des généralisations de la conjecture de Zagier (voir la remarque 1.8).

Les corrélateurs motiviques s'expriment en termes des polylogarithmes multiples motiviques, et *vice versa*. Par exemple, on montre facilement par récurrence sur $n \geq 1$ qu'on a l'égalité, pour $x \in F$:

$$\text{Li}_n^{\mathcal{C}}(x) = -\text{Cor}^{\mathcal{C}}(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, x).$$

Il semble néanmoins que les relations entre corrélateurs motiviques aient une combinatoire plus maniable que celles entre polylogarithmes multiples motiviques, notamment du fait de la symétrie cyclique (comparer les formules (41) et (45)). Ils sont à la source de la description « symbolique » par GONCHAROV et RUDENKO (2018) de la cogèbre de Lie motivique en poids ≤ 4 , que nous abordons maintenant.

5. LA STRUCTURE DE LA COGÈBRE DE LIE MOTIVIQUE EN POIDS ≤ 4

On s'intéresse maintenant à la structure fine de la cogèbre de Lie motivique en poids ≤ 4 et aux résultats de GANGL (2016) et GONCHAROV et RUDENKO (2018) vers la conjecture de liberté et la conjecture de Zagier pour $n = 4$.

5.1. La relation à 5 termes en poids 4

Rappelons que la conjecture de liberté prévoit, en poids 4, la suite exacte courte (36). En mettant de côté l'injectivité de ι_4 , cela revient à montrer que la composante $\delta_{2,2}$ du cocrochet induit un isomorphisme

$$\bar{\delta}_{2,2} : \mathcal{C}_4(F)/\iota_4(\mathcal{B}_4(F)) \longrightarrow \mathcal{C}_2(F) \wedge \mathcal{C}_2(F) .$$

La surjectivité est facile, au moins dans le cas d'un corps de nombres où l'on sait que $\mathcal{C}_2(F)$ est engendré par les dilogarithmes motiviques $\text{Li}_2^{\mathcal{C}}(x)$ pour $x \in F^\times$. La formule générale (41) implique en effet l'égalité, pour $x, y \in F^\times$:

$$(46) \quad \delta_{2,2} \text{I}_{3,1}^{\mathcal{C}}(x, y) = -\text{Li}_2^{\mathcal{C}}(x) \wedge \text{Li}_2^{\mathcal{C}}(y) .$$

Pour prouver l'injectivité, il faut déjà montrer que tout polylogarithme multiple motivique de poids 4 dont le cocrochet $\delta_{2,2}$ s'annule est une combinaison linéaire de polylogarithmes motiviques $\text{Li}_4^{\mathcal{C}}(x)$. (C'est suffisant si l'on croit à la conjecture 4.1, ou dans une version « symbolique » de la cogèbre de Lie motivique où seuls les polylogarithmes multiples apparaissent.) Une première réduction (voir GANGL (2016) et DAN (2008) corrigé par CHARLTON (2017)) permet d'exprimer tout polylogarithme multiple motivique de poids 4 en termes de $\text{Li}_4^{\mathcal{C}}$ et $\text{Li}_{3,1}^{\mathcal{C}}$ seulement. Au vu de (46) on est alors amené à définir une section de $\bar{\delta}_{2,2}$ par la formule $\text{Li}_2^{\mathcal{C}}(x) \wedge \text{Li}_2^{\mathcal{C}}(y) \mapsto -\text{I}_{3,1}^{\mathcal{C}}(x, y)$, et le tout est de montrer que cette section est bien définie. On montre assez facilement que $\text{I}_{3,1}^{\mathcal{C}}(x, y) + \text{I}_{3,1}^{\mathcal{C}}(y, x) = 0$ modulo $\iota_4(\mathcal{B}_4(F))$ et il reste à montrer que $\text{I}_{3,1}^{\mathcal{C}}$ vérifie la relation à 5 termes en la première variable, ces relations engendrant toutes les relations entre dilogarithmes motiviques $\text{Li}_2^{\mathcal{C}}$ au moins si F est un corps de nombres. C'est le contenu du théorème suivant, conjecturé par GONCHAROV (1994, 1995a) et démontré par GANGL (2016).

THÉORÈME 5.1. — *On a, pour $x_0, \dots, x_4 \in \mathbb{P}^1(F)$ deux à deux distincts et $y \in F^\times$:*

$$(47) \quad \sum_{i=0}^4 (-1)^i \text{I}_{3,1}^{\mathcal{C}}(r(x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_4), y) = 0 \pmod{\iota_4(\mathcal{B}_4(F))} .$$

Ce théorème apporte du poids à la conjecture de liberté (conjecture 3.8), et est une étape cruciale dans la preuve de la conjecture de Zagier pour $n = 4$. La preuve de Gangl, assistée par ordinateur, exprime le membre de gauche de (47) comme une combinaison linéaire explicite de 122 évaluations de $\text{Li}_4^{\mathcal{C}}$ en des arguments qui sont malheureusement difficiles à interpréter en vue d'éventuelles généralisations. L'approche de GONCHAROV et RUDENKO (2018) permet de redémontrer ce résultat de manière plus conceptuelle

grâce à des relations entre polylogarithmes multiples motiviques qui semblent avoir une origine systématique. Ces relations donnent lieu à une version « symbolique » de la cogèbre de Lie motivique en poids ≤ 4 , qu'on présente maintenant.

5.2. Définitions de B et C en poids ≤ 4

En suivant GONCHAROV et RUDENKO (2018), on définit maintenant par générateurs et relations des espaces vectoriels $C_n(F)$ et des sous-espaces $B_n(F)$ de manière fonctorielle en le corps F , pour $n = 1, 2, 3, 4$. On pose $B_1(F) = C_1(F) = F_{\mathbb{Q}}^{\times}$.

On considère la normalisation suivante du birapport de 4 points dans \mathbb{P}^1

$$r_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_4 - x_1)},$$

ainsi qu'une version à 6 points :

$$r_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = -\frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)(x_5 - x_6)}{(x_2 - x_3)(x_4 - x_5)(x_6 - x_1)}.$$

On voit r_2 (resp. r_3) comme un morphisme de $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}$ (resp. $\overline{\mathcal{M}}_{0,6}$) dans \mathbb{P}^1 . Rappelons que l'espace de modules $\mathcal{M}_{0,k}$ est l'espace des k -uplets de points deux à deux distincts de la droite projective \mathbb{P}^1 modulo les automorphismes de \mathbb{P}^1 , et que $\overline{\mathcal{M}}_{0,k}$ désigne sa compactification de Deligne–Mumford. Dans les définitions qui suivent on fait un abus de notation en notant (x_1, \dots, x_k) un point de $\overline{\mathcal{M}}_{0,k}$, et de manière similaire les points qui s'en déduisent par l'action du groupe symétrique sur k éléments ou par des applications d'oubli $\overline{\mathcal{M}}_{0,k} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,k'}$ avec $k' < k$.

DÉFINITION 5.2. — *On définit $B_2(F) = C_2(F)$ comme le quotient de l'espace vectoriel librement engendré par des symboles $[x]_2$ pour $x \in \mathbb{P}^1(F)$ par les relations suivantes, pour $(x_1, \dots, x_5) \in \overline{\mathcal{M}}_{0,5}(F)$:*

$$\begin{aligned} & [r_2(x_1, x_2, x_3, x_4)]_2 + [r_2(x_2, x_3, x_4, x_5)]_2 + [r_2(x_3, x_4, x_5, x_1)]_2 \\ & + [r_2(x_4, x_5, x_1, x_2)]_2 + [r_2(x_5, x_1, x_2, x_3)]_2 = 0. \end{aligned}$$

On a ici réécrit la relation à 5 termes (18) sous une forme cyclique. Dans la suite on utilise la sommation cyclique $\text{Cyc}_n f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n})$, où les indices sont pris modulo n .

DÉFINITION 5.3. — *On définit $B_3(F) = C_3(F)$ comme le quotient de l'espace vectoriel engendré par des symboles $[x]_3$ et $[x, y]_{2,1}$ pour $x, y \in \mathbb{P}^1(F)$ par les relations suivantes, pour $(x_1, \dots, x_6) \in \overline{\mathcal{M}}_{0,6}(F)$:*

$$\begin{aligned} (48) \quad & \text{Cyc}_6 \left([r_2(x_1, x_2, x_3, x_4), r_2(x_4, x_5, x_6, x_1)]_{2,1} \right. \\ & \left. - [r_2(x_1, x_2, x_4, x_5)]_3 + 2[r_2(x_1, x_3, x_4, x_5)]_3 \right) \\ & = 4[r_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)]_3 - 6[1]_3. \end{aligned}$$

Les générateurs $[x, y]_{2,1}$ vont jouer le rôle de polylogarithmes multiples (ou corrélateurs) motiviques de profondeur 2. Comme le suggère l'égalité $B_3(F) = C_3(F)$, ils s'écrivent en fonction des générateurs $[x]_3$ grâce à la spécialisation suivante (au diviseur $\{x_1 = x_3\} \simeq \overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ du bord de $\overline{\mathcal{M}}_{0,6}$) de la relation (48) :

$$[x, y]_{2,1} = [1 - x^{-1}]_3 + [1 - y^{-1}]_3 + [y/x]_3 + [(1 - y)/(1 - x)]_3 - [x(1 - y)/y(1 - x)]_3 - [1]_3 .$$

En substituant cette dernière expression dans (48) on obtient la relation (« à 22 termes ») découverte par GONCHAROV (1994, 1995a) et qui est à l'origine de la relation « à 840 termes » (19). Il est notable que la relation (49) est liée à la géométrie des configurations de 6 points dans \mathbb{P}^1 alors que (19) concerne les configurations de 7 points dans \mathbb{P}^2 .

DÉFINITION 5.4. — *On définit $C_4(F)$ comme le quotient de l'espace vectoriel engendré par des symboles $[x]_4$ et $[x, y]_{3,1}$ pour $x, y \in \mathbb{P}^1(F)$ par les relations suivantes⁽¹²⁾, pour $(x_1, \dots, x_7) \in \overline{\mathcal{M}}_{0,7}(F)$:*

$$(49) \quad \begin{aligned} & \text{Cyc}_7 \left(- [r_2(x_1, x_2, x_3, x_4), r_2(x_4, x_6, x_7, x_1)]_{3,1} \right. \\ & \quad + [r_2(x_1, x_2, x_3, x_4), r_2(x_4, x_5, x_7, x_1)]_{3,1} \\ & \quad - [r_2(x_1, x_2, x_3, x_4), r_2(x_4, x_5, x_6, x_1)]_{3,1} \\ & \quad \left. + [r_2(x_1, x_2, x_4, x_6)]_4 + [r_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)]_4 \right) = 0 . \end{aligned}$$

On définit $B_4(F) \subset C_4(F)$ comme le sous-espace engendré par les symboles $[x]_4$.

Les relations (48) et (49) ont une origine commune qui sera l'objet du §6. Contentons-nous pour l'instant de noter que les arguments de r_2 et r_3 dans ces relations s'interprètent comme des dissections d'un polygone à 6 côtés (respectivement à 7 côtés) comme dans la figure 2.

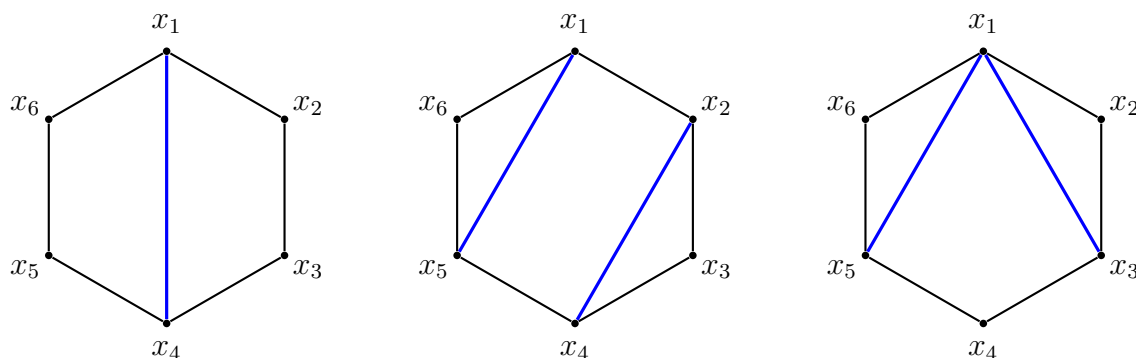


FIGURE 2. Les arguments de r_2 dans la relation (48) sont les sommets des quadrilatères figurant dans les dissections d'un hexagone.

12. GONCHAROV et RUDENKO (2018) incluent dans leur définition de $C_4(F)$ les relations entre les générateurs $[x]_4$ qui viennent des relations tétralgorithimiques $\mathcal{R}_4(F)$, tout en conjecturant que ça ne change pas la définition. Cet ajout ne sera pas nécessaire en ce qui nous concerne.

5.3. La structure de la cogèbre de Lie motivique en poids ≤ 4

Le théorème suivant est prouvé par GONCHAROV et RUDENKO (2018).

THÉORÈME 5.5. — 1) Les formules suivantes munissent $C_{\leq 4}(F)$ d'une structure de cogèbre de Lie graduée :

$$\begin{aligned} \delta[x]_2 &= -(1-x) \wedge x, \quad \delta[x]_3 = [x]_2 \wedge x, \quad \delta[x]_4 = [x]_3 \wedge x, \\ \delta[x, y]_{2,1} &= [(1-y)/(1-x)]_2 \wedge (y/x) + [y/x]_2 \wedge (1-y)/(1-x) \\ &\quad + [x]_2 \wedge (1-y^{-1}) + [y]_2 \wedge (1-x^{-1}), \\ \delta[x, y]_{3,1} &= [x, y]_{2,1} \wedge (x/y) + [x/y]_3 \wedge (1-x)/(1-y) \\ &\quad + [x]_3 \wedge (1-y^{-1}) - [y]_3 \wedge (1-x^{-1}) - [x]_2 \wedge [y]_2. \end{aligned}$$

2) Les formules suivantes définissent un morphisme de cogèbres de Lie graduées $C_{\leq 4}(F) \rightarrow \mathcal{C}_{\leq 4}(F)$

$$\begin{aligned} [x]_n &\mapsto -\text{Cor}^{\mathcal{C}}(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, x) = \text{Li}_n^{\mathcal{C}}(x) \quad \text{pour } n = 2, 3, 4, \\ [x, y]_{2,1} &\mapsto \text{Cor}^{\mathcal{C}}(0, x, 1, y), \\ [x, y]_{3,1} &\mapsto -\text{Cor}^{\mathcal{C}}(0, 0, x, 1, y). \end{aligned}$$

C'est la deuxième partie du théorème qui justifie les définitions de $C_{\leq 4}(F)$ et du cocrochet. Nous expliquerons dans la prochaine section comment Goncharov et Rudenko sont arrivés à ces formules par la combinatoire des dissections de polygones. On renvoie le lecteur aux travaux récents de RUDENKO (2020) et CHARLTON, GANGL et RADCHENKO (2020) pour des généralisations en poids supérieur.

Le théorème suivant, qui est une version « symbolique » du théorème 5.1, est prouvé par GONCHAROV et RUDENKO (2018).

THÉORÈME 5.6. — On a une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow B_4(F) \longrightarrow C_4(F) \xrightarrow{\delta_{2,2}} C_2(F) \wedge C_2(F) \longrightarrow 0.$$

On note d'abord que la première flèche est injective par définition et que la deuxième flèche est surjective puisque $\delta_{2,2}[x, y]_{3,1} = -[x]_2 \wedge [y]_2$ pour tous les $x, y \in \mathbb{P}^1(F)$. Il reste à montrer l'exactitude au milieu ; comme dans la discussion du §5.1, cela revient à montrer que le morphisme $C_2(F) \wedge C_2(F) \rightarrow C_4(F)/B_4(F)$ donné par $[x]_2 \wedge [y]_2 \mapsto -[x, y]_{3,1}$ est bien défini, c'est-à-dire que le symbole $[x, y]_{3,1}$ vérifie $[x, y]_{3,1} + [y, x]_{3,1} = 0$ et la relation à 5 termes en la première variable modulo $B_4(F)$. Ces deux relations sont prouvées en combinant des spécialisations de la relation générique (49) à des strates de $\overline{\mathcal{M}}_{0,7}$ bien choisies.

On peut montrer que la restriction à $B_{\leq 4}(F)$ du morphisme $C_{\leq 4}(F) \rightarrow \mathcal{C}_{\leq 4}(F)$ se factorise par un morphisme $B_{\leq 4}(F) \rightarrow \mathcal{B}_{\leq 4}(F)$. On obtient alors le diagramme commutatif de complexes suivant, où \sim désigne un quasi-isomorphisme.

$$(50) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{B}^\bullet(F, 4) & \longrightarrow & \mathrm{CE}^\bullet(\mathcal{C}(F))_4 \\ \uparrow & & \uparrow \\ B^\bullet(F, 4) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{CE}^\bullet(\mathcal{C}(F))_4 \end{array}$$

5.4. Compléments sur la preuve

En plus du quasi-isomorphisme (50), un ingrédient important de la preuve du cas $n = 4$ de la conjecture de Zagier par GONCHAROV et RUDENKO (2018) est la construction d'un morphisme de complexes

$$BG^\bullet(F, 4) \longrightarrow \mathrm{CE}^\bullet(\mathcal{C}(F))_4 ,$$

où $BG^\bullet(F, 4)$ est le complexe bigrassmannien introduit au §1.7. La composante cruciale est un morphisme $G_7(F, 4) \rightarrow C_4(F)$, qui associe un élément de $C_4(F)$ à une configuration (a_0, \dots, a_7) de 8 points de F^4 en position générale. Ce morphisme est une version du polylogarithme grassmannien de GONCHAROV (2005b, 2013) et est construit de manière implicite en se basant sur des travaux antérieurs de GONCHAROV (2000).

Peu après, CHARLTON, GANGL et RADCHENKO (2019) ont donné une formule explicite pour ce morphisme, poussé dans $\mathrm{CE}^\bullet(\mathcal{C}(F))_4$, en termes de $I_{3,1}^{\mathcal{C}}$ et $\mathrm{Li}_4^{\mathcal{C}}$. Il devrait donc être possible, quitte à vérifier des compatibilités avec les relations définissant $\mathcal{C}(F)$, de se servir de cette formule pour rendre la preuve de GONCHAROV et RUDENKO (2018) effective.

De plus, CHARLTON, GANGL et RADCHENKO (2019) écrivent explicitement un représentant dans $\mathcal{B}_4(F)$ du même cocycle pour en déduire une équation fonctionnelle du tétralgorithme, dans l'esprit de (18) et (19). Elle s'écrit dans $\mathcal{B}_4(F)$ sous la forme prévue

$$\sum_{i=0}^8 (-1)^i R_4(a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_8) = 0 ,$$

où $R_4(a_1, \dots, a_8) \in \mathbb{Q}[F^\times]$ est un invariant explicite mais compliqué d'une configuration de 8 points dans $\mathbb{P}^3(F)$, dont l'interprétation géométrique n'est pas encore claire.

6. LE RÔLE DES STRUCTURES AMASSÉES ET DE LA COMBINATOIRE DES DISSECTIONS

Les structures amassées, introduites par FOMIN et ZELEVINSKY (2002), sont des objets de combinatoire algébrique (et géométrique) qui interviennent dans de nombreux domaines. FOCK et GONCHAROV (2009) ont mis en lumière l'importance de ces structures dans l'étude du dilogarithme et de ses aspects motiviques, et GONCHAROV et RUDENKO (2018) ont incorporé les polylogarithmes (multiples) supérieurs dans ce

contexte. Ce sont ces liens, et notamment la combinatoire des dissections de polygones, qui expliquent la forme des relations (48) et (49) dont il a été question plus haut.

6.1. Structures amassées et dilogarithme

Fixons un entier n . Une *graine* (B, u) est la donnée d'une matrice antisymétrique à coefficients entiers $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et d'une famille $u = (u_1, \dots, u_n)$ d'éléments du corps $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$ qui l'engendrent librement. On peut la représenter par un carquois (graphe orienté) dont les sommets sont les entiers de 1 à n , décorés par les u_i , et où b_{ij} arêtes vont de i vers j si $b_{ij} \geq 0$. On appelle B la *matrice d'échange*, u l'*amas* et les u_i les *variables d'amas*.

Pour un sommet $k \in \{1, \dots, n\}$ la *mutation* de la graine (B, u) suivant le sommet k est la graine (B', u') où

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & \text{si } i = k \text{ ou } j = k \\ b_{ij} + |b_{ik}|b_{kj} & \text{si } b_{ik}b_{kj} > 0 \\ b_{ij} & \text{sinon} \end{cases}$$

et les variables u_i sont données par $u'_i = u_i$ pour $i \neq k$ et par la relation d'échange

$$u_k u'_k = \prod_{i | b_{ik} > 0} u_i^{b_{ik}} + \prod_{j | b_{kj} > 0} u_j^{b_{kj}}.$$

Exemple 6.1. — Voici un exemple de mutation (suivant le sommet de gauche) :

$$x_1 \bullet \longrightarrow \bullet x_2 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1+x_2}{x_1} \bullet \longleftarrow \bullet x_2$$

Si l'on continue à appliquer des mutations suivant le sommet de droite, puis de gauche, puis de droite, puis de gauche, on retombe (après 5 mutations donc) sur la graine de départ, à renumérotation des sommets près : $x_2 \bullet \longleftarrow \bullet x_1$.

En partant d'une graine et en appliquant successivement des mutations suivant tous les sommets possibles, on produit ce qu'on appellera improprement une *structure amassée*. Il arrive, comme dans l'exemple précédent, qu'on ne produise ainsi qu'un nombre fini de graines différentes. Ce phénomène de finitude est rare et correspond, d'après FOMIN et ZELEVINSKY (2003a), aux graines dont une mutation a un carquois sous-jacent qui est une orientation d'un carquois de Dynkin (type ADE). Dans ces cas, la structure combinatoire des mutations peut être modélisée par un graphe appelé *graphe d'échange*, où les sommets sont les graines (à renumérotation des sommets près) et les arêtes indiquent les mutations. D'après CHAPOTON, FOMIN et ZELEVINSKY (2002), le graphe d'échange est le 1-squelette d'un polytope convexe appelé associaèdre généralisé. En type A il s'agit de l'associaèdre classique, découvert par Stasheff. L'exemple que nous venons de traiter correspond au type A_2 , et son graphe d'échange est un cycle de longueur 5, qui est le bord d'un pentagone.

L'importance des structures amassées dans l'étude du dilogarithme et de ses aspects motiviques a été mise en lumière par FOCK et GONCHAROV (2009). Pour une graine (B, u) donnée on définit :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j} b_{ij} u_i \wedge u_j \in \Lambda^2(\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)^\times).$$

Si (B', u') est obtenue par mutation du sommet k , on a la relation fondamentale

$$(51) \quad W' - W = -(1 + X) \wedge X \quad \text{avec} \quad X = \prod_{j=1}^n u_j^{b_{kj}}.$$

On l'écrit sous la forme plus suggestive

$$(52) \quad W' - W = \delta_2[-X]_2,$$

où $[-X]_2$ est vu dans le groupe de Bloch $\mathcal{B}_2(\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n))$. Cela implique qu'on a l'égalité $[W] = [W']$ dans $K_2(\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n))$: une classe canonique dans le K_2 est attachée à la structure amassée.

En revenant au cas du type A_2 , on voit qu'on peut exprimer la discussion précédente sous la forme du diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_2 & \xrightarrow{\partial} & C_1 & \xrightarrow{\partial} & C_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathcal{B}_2(\mathbb{Q}(x_1, x_2)) & \xrightarrow{\delta_2} & \Lambda^2(\mathbb{Q}(x_1, x_2)^\times)_{\mathbb{Q}} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

La première ligne est le complexe cellulaire du pentagone. La flèche verticale de droite envoie un sommet du pentagone, c'est-à-dire une graine, vers l'élément W correspondant. La flèche verticale du milieu envoie une arête du pentagone, c'est-à-dire une mutation, vers l'élément $[-X]_2$ correspondant. La commutativité du carré de droite est équivalente à (52). La commutativité du carré de gauche est équivalente à l'égalité

$$[-x_1]_2 + \left[-\frac{1+x_2}{x_1} \right]_2 + \left[-\frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \right]_2 + \left[-\frac{1+x_1}{x_2} \right]_2 + [-x_2]_2 = 0$$

dans $\mathcal{B}_2(\mathbb{Q}(x_1, x_2))$, ce qui est une réécriture⁽¹³⁾ de la relation à 5 termes du dilogarithme (17).

Une idée importante de GONCHAROV et RUDENKO (2018) est que les liens entre structures amassées et dilogarithmes devraient s'étendre en poids supérieur. On se contentera

13. Il suffit pour s'en convaincre de poser $x_1 = -x$, $x_2 = -1 + y$, et utiliser les relations $[1 - u]_2 = -[u]_2$ et $[u^{-1}]_2 = -[u]_2$. Notons qu'on peut justifier de la commutativité du carré de gauche, et donc redécouvrir la relation à 5 termes, par un argument abstrait. En effet, δ_2 est injective puisque d'après la remarque 1.12 son noyau est un quotient de $\text{gr}_\gamma^2 K_3(\mathbb{Q}(x_1, x_2))_{\mathbb{Q}}$, qui par localisation est isomorphe à $\text{gr}_\gamma^2 K_3(\mathbb{Q})_{\mathbb{Q}}$, et donc nul par le théorème 1.4. La commutativité du carré de droite et le fait que $\partial \circ \partial = 0$ impliquent donc la commutativité du carré de gauche.

de développer ces idées dans le cadre du type A , alors que la vision de Goncharov–Rudenko est plus générale. Il est d’ailleurs connu que les autres types jouent un rôle dans les équations fonctionnelles des polylogarithmes (on trouve chez GOLDEN, GONCHAROV, SPRADLIN, VERGU et VOLOVICH (2014) une équation fonctionnelle pour le trilogarithme dans le cadre de la structure amassée de type D_4).

6.2. Structures amassées en type A

Rappelons que l’associaèdre \mathcal{A}_n est un polytope convexe de dimension $n - 3$ dont le treillis des faces est en bijection avec le treillis des dissections d’un polygone Π_n à n côtés, la codimension d’une face étant le nombre de diagonales dans la dissection correspondante. Les sommets de \mathcal{A}_n sont donc en bijection avec les triangulations de Π_n . La famille des associaèdres a une structure opéradique : à une dissection de Π_n en des polygones $\Pi_{n_1}, \dots, \Pi_{n_r}$ correspond une face de \mathcal{A}_n isomorphe au produit $\mathcal{A}_{n_1} \times \dots \times \mathcal{A}_{n_r}$.

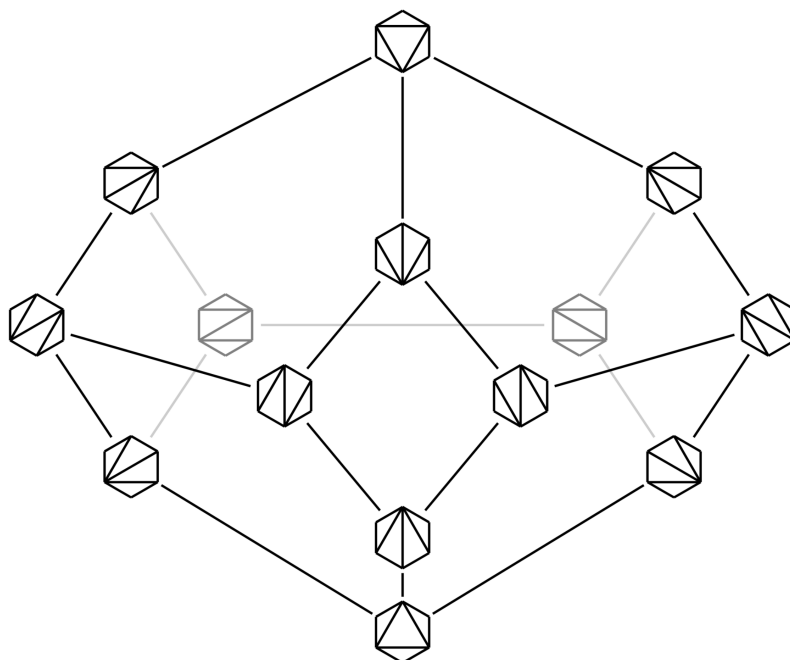


FIGURE 3. L’associaèdre \mathcal{A}_6 a 3 faces carrées et 6 faces pentagonales (figure empruntée à FOMIN et ZELEVINSKY (2003b)).

Le 1-squelette de \mathcal{A}_n est le graphe d’échange d’une structure amassée (de type A_{n-3}) qu’on décrit maintenant. Notons $|v, w|$ le déterminant de deux vecteurs v, w du plan. Soit Y_n la variété sur \mathbb{Q} définie comme le quotient par SL_2 de l’espace des n -uplets (v_1, \dots, v_n) de points du plan en position générale (c’est-à-dire tels que $|v_i, v_j| \neq 0$ si $i \neq j$). Via les déterminants $|v_i, v_j|$, on peut voir Y_n comme la sous-variété du tore $\mathbb{G}_m^{n(n-1)/2}$ définie par les équations de Plücker. On peut aussi voir Y_n comme l’ouvert du cône affine sur la Grassmannienne $Gr(2, n)$ formé des 2-plans dans un espace vectoriel de dimension n qui sont en position générale par rapport à n hyperplans de coordonnées. Notons F_n

le corps des fonctions de Y_n , qui est non canoniquement isomorphe à $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_{2n-3})$. À une dissection de Π_n en des polygones $\Pi_{n_1}, \dots, \Pi_{n_r}$ est associée un morphisme de Y_n vers $Y_{n_1} \times \dots \times Y_{n_r}$ dont les composantes sont des morphismes d'oubli, et on a donc un morphisme $F_{n_1} \otimes \dots \otimes F_{n_r} \longrightarrow F_n$.

On oriente le polygone Π_n et on étiquette ses sommets avec des symboles v_1, \dots, v_n de manière cyclique. On associe une graine à une triangulation de Π_n de la manière suivante, illustrée par la figure 4. Définissons un carquois en plaçant un sommet sur chacune des $n - 3$ diagonales de la triangulation et sur chacun des n côtés de Π_n (ces n derniers sommets sont considérés *gelés*, ce qui signifie qu'ils ne donneront pas lieu à des mutations). On décore par la variable d'amas $|v_i, v_j| \in F_n$ un sommet qui est sur un segment reliant v_i et v_j , avec $i < j$. Chaque triangle de la triangulation donne lieu à trois sommets du carquois, qu'on relie par trois arêtes orientées dans le sens direct.

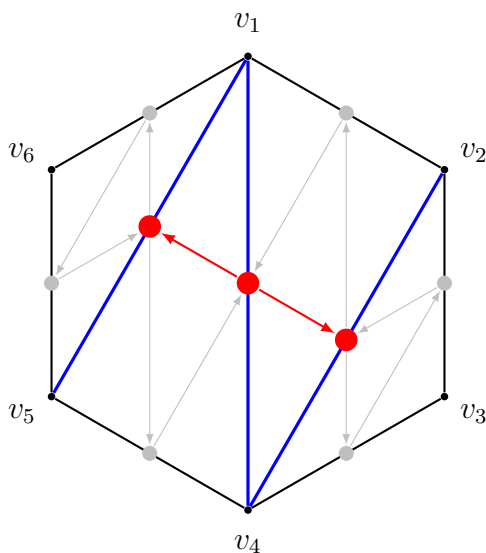


FIGURE 4. Le carquois associé à une triangulation.

Soient T et T' deux triangulations qui sont reliées par un « flip » d'une diagonale dans un quadrilatère, comme dans la figure 5. On voit grâce aux relations de Plücker que les graines associées à T et T' sont des mutations l'une de l'autre suivant le sommet correspondant au quadrilatère. On engendre, en itérant les « flips » (mutations suivant les sommets non gelés), une structure amassée avec un nombre fini de graines dont le graphe d'échange est le 1-squelette de l'associaèdre \mathcal{A}_n .

Par la construction du paragraphe précédent, on associe un élément $W_T \in \Lambda^2(F_n^\times)_{\mathbb{Q}}$ à toute triangulation T de Π_n . Concrètement, on associe au triangle ($n = 3$) l'élément

$$W_{\Delta} = |v_1, v_2| \wedge |v_2, v_3| + |v_2, v_3| \wedge |v_1, v_3| + |v_1, v_3| \wedge |v_1, v_2| \in \Lambda^2(F_3^\times)_{\mathbb{Q}},$$

et à une triangulation T la somme des contributions de chaque triangle :

$$(53) \quad W_T = \sum_{\Delta \in T} W_{\Delta}.$$

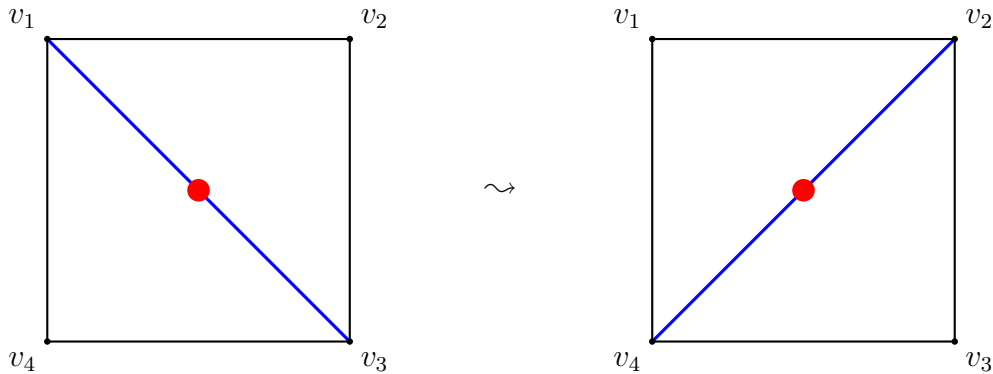


FIGURE 5. Un « flip » d'une diagonale dans un quadrilatère.

6.3. Polylogarithmes amassés

6.3.1. La conjecture. — GONCHAROV et RUDENKO (2018) partent de l'idée, simple mais féconde, d'écrire la relation (53) sous une forme multiplicative, et donc plus naturellement compatible à la structure opéradique,

$$(54) \quad \exp(W_T) = \prod_{\Delta \in T} \exp(W_\Delta) ,$$

dans l'algèbre extérieure $\Lambda(F_n^\times)_\mathbb{Q}$ (il n'y a qu'un nombre fini de termes puisque $\exp(W_\Delta) = 1 + W_\Delta$). C'est ce passage à l'exponentielle qui permet de passer du dilogarithme aux poids supérieurs. Afin de formaliser cela, il sera commode de faire intervenir la cogèbre de Lie motivique du corps F_n , dont l'existence est malheureusement conditionnelle à la conjecture de Beilinson–Soulé pour F_n , qui n'est pas prouvée. On pourrait écrire des énoncés inconditionnels (mais moins propres) au prix de remplacer les F_n par un corps de nombres F et les variables v_i par des vecteurs suffisamment génériques de F^2 .

Passons en notation homologique et considérons les complexes

$$\mathrm{CE}_\bullet(\mathcal{C}(F_n))_k = \mathrm{CE}^{k-\bullet}(\mathcal{C}(F_n))_k \quad \text{et} \quad \mathrm{CE}_\bullet(\mathcal{C}(F_n)) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathrm{CE}_\bullet(\mathcal{C}(F_n))_k .$$

On note $C_\bullet(\mathcal{A}_n)$ le complexe cellulaire de l'associaèdre \mathcal{A}_n , dont une base est donnée par les dissections de Π_n . La conjecture suivante est due à GONCHAROV et RUDENKO (2018).

CONJECTURE 6.2. — *Il existe des morphismes de complexes*

$$\alpha_n : C_\bullet(\mathcal{A}_n) \longrightarrow \mathrm{CE}_\bullet(\mathcal{C}(F_n))$$

pour $n \geq 3$, appelés polylogarithmes amassés, qui vérifient :

— *Initialisation* : le morphisme $\alpha_3 : C_0(\mathcal{A}_3) \rightarrow \mathrm{CE}_0(\mathcal{C}(F_3)) = \Lambda(F_3^\times)_\mathbb{Q}$ est donné par

$$\alpha_3(\Delta) = \exp(W_\Delta) .$$

— *Compatibilité aux structures opéradiques* : pour toute dissection $D_1 \times D_2$ de Π_n obtenue en recollant une dissection D_1 de Π_{n_1} et une dissection D_2 de Π_{n_2} avec $n_1 + n_2 = n + 1$, on a l'égalité :

$$\alpha_n(D_1 \times D_2) = \alpha_{n_1}(D_1) \alpha_{n_2}(D_2) ,$$

où le membre de droite s'interprète via les inclusions naturelles de F_{n_1} et F_{n_2} dans F_n .

Grâce à la structure opéradique, les images par α_n des générateurs de $C_{n-3}(\mathcal{A}_n)$, pour tout $n \geq 3$, déterminent uniquement la collection des morphismes α_n . L'idée est de découvrir les α_n par une procédure récursive.

Remarque 6.3. — D'un point de vue opéradique, la conjecture 6.2 prévoit l'existence d'un diagramme commutatif d'opérades (différentielles graduées, cycliques non symétriques) :

$$\begin{array}{ccc} \text{As}_\infty & \xrightarrow{\sim} & \text{As} \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \exp(W) \\ \text{CE}(\mathcal{C}) & \longrightarrow & K^M \end{array}$$

Ce diagramme fait intervenir l'opérade As des algèbres associatives, et sa résolution canonique As_∞ , l'opérade des algèbres associatives à homotopie près, données en arité n par $\text{As}(n) = H_0(\mathcal{A}_n) = \mathbb{Q}$ et $\text{As}_\infty(n) = C_\bullet(\mathcal{A}_n)$, où la structure opéradique est induite par les inclusions des faces des associaèdres (voir par exemple LODAY et VALLETTE (2012, chapitre 9)). On a noté $\text{CE}(\mathcal{C})$ et K^M les opérades données en arité n par $\text{CE}(\mathcal{C})(n) = \text{CE}_\bullet(\mathcal{C}(F_n))$ et $K^M(n) = H_0(\text{CE}_\bullet(\mathcal{C}(F_n))) = K^M(F_n)$ respectivement, avec les structures opéradiques induites par le produit de l'algèbre extérieure. Il ne semble pas y avoir d'argument abstrait d'algèbre homologique qui implique l'existence du morphisme α .

6.3.2. Calculs en basse dimension. — En degré 0, la compatibilité aux structures opéradiques et (54) force α_n à être définie par $\alpha_n(T) = \exp(W_T)$. En degré 1, l'égalité (52) motive la définition, pour D une dissection qui contient des triangles et un quadrilatère :

$$\alpha_n(D) = -\text{Li}_2^{\mathcal{C}}(-X_D) \otimes \frac{1}{2}(\exp(W_T) + \exp(W_{T'})) ,$$

où T et T' sont les deux triangulations de Π_n compatibles avec D , et X_D est défini comme dans (51). On vérifie que cette formule est compatible aux structures opéradiques et qu'on a $\delta\alpha_n(D) = \alpha_n(T') - \alpha_n(T) = \alpha_n(\partial D)$. Notons que $-X_D$ est un birapport ; par exemple dans le cas du carré on a en poids 2 :

$$\alpha_4(\square)_2 = -\text{Li}_2^{\mathcal{C}}(r_2(x_1, x_2, x_3, x_4)) ,$$

où l'on note $x_i \in \mathbb{P}^1$ la classe de v_i .

Goncharov et Rudenko étendent la définition de α_n en degré 2. Pour cela il suffit de traiter le cas d’une dissection D de Π_n qui contient des triangles et un pentagone. Notons D_1, \dots, D_5 les dissections obtenues en ajoutant une diagonale à D , de telle sorte que la superposition de D_{i-1} et D_i (indices modulo 5) crée une triangulation T_i . On remarque que l’élément

$$\widetilde{W} = W_{D_i} - X_{D_{i-1}} \wedge X_{D_i} \in \Lambda^2(F_n^\times)_\mathbb{Q}$$

est indépendant de $i \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. La formule

$$\alpha_n(D) = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}} \text{Li}_3^{\mathcal{C}}(-X_{D_i}) \otimes (X_{D_{i-1}}/X_{D_{i+1}}) \wedge \exp(\widetilde{W})$$

est alors compatible aux structures opéradiques et vérifie $\delta\alpha_n(D) = \alpha_n(\partial D)$. Par exemple dans le cas du pentagone on a en poids 4 :

$$\alpha_5(\diamond)_4 = \frac{1}{2} \text{Cyc}_5 \left(\text{Li}_3^{\mathcal{C}}(r_2(x_1, x_2, x_3, x_4)) \otimes r_2(x_1, x_3, x_4, x_2) \right).$$

En degré 3, Goncharov et Rudenko utilisent la combinatoire des corrélateurs pour découvrir une formule pour α_6 . Ils prouvent qu’en posant

$$\begin{aligned} \alpha_6(\diamond)_4 = & \text{Cyc}_6^- \left(-\text{Cor}^{\mathcal{C}}(0, 0, r_2(x_1, x_2, x_3, x_4), 1, r_2(x_4, x_5, x_6, x_1)) \right. \\ & \left. + \text{Li}_4^{\mathcal{C}}(r_2(x_1, x_3, x_4, x_5)) - \text{Li}_4^{\mathcal{C}}(r_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)) \right), \end{aligned}$$

on définit un morphisme de complexes $C_\bullet(\mathcal{A}_6) \rightarrow \text{CE}_\bullet(\mathcal{C}(F_6))_4$.

La structure opéradique permet alors d’induire un morphisme de complexes $C_{\bullet \leq 3}(\mathcal{A}_7) \rightarrow \text{CE}_\bullet(\mathcal{C}(F_7))_4$ puisque les faces de dimension ≤ 3 de l’associaèdre \mathcal{A}_7 sont toutes des produits d’associaèdres de dimension inférieure. On a donc l’égalité, dans $\text{CE}_2(\mathcal{C}(F_7))_4 = \mathcal{C}_3(F_7) \wedge (F_7^\times)_\mathbb{Q} \oplus \mathcal{C}_2(F_7) \wedge \mathcal{C}_2(F_7)$:

$$\delta(\alpha_7(\partial(\diamond))_4) = \alpha_7(\partial\partial(\diamond))_4 = 0.$$

Par un argument de rigidité comme dans la remarque 3.2, on a donc, pour F un corps de nombres et $x_1, \dots, x_7 \in \mathbb{P}^1(F)$, la relation

$$\alpha_7(\partial(\diamond))_4 = 0$$

dans $\mathcal{C}_4(F)$. C’est exactement la relation (49) qui apparaît dans la définition de $C_4(F)$.

6.4. Polylogarithmes quadrangulaires

Concluons ce texte avec un mot sur les travaux de RUDENKO (2020) et la preuve du théorème 4.4, qui est une étape vers la conjecture de profondeur de Goncharov. Les techniques utilisent des objets appelés *polylogarithmes quadrangulaires*. Ils sont notés

$$\text{QLi}_{n,k}(x_0, \dots, x_{2n+1}) \in \mathcal{C}_{n+k}(F),$$

avec $x_0, \dots, x_{2n+1} \in \mathbb{P}^1(F)$, et sont définis comme des sommes alternées de certains corrélateurs $\text{Cor}^{\mathcal{C}}(x_{i_0}, \dots, x_{i_{n+k}})$. Rudenko montre les deux liens suivants entre polylogarithmes quadrangulaires et polylogarithmes multiples.

- (a) Tout corrélateur motivique de poids pair $2n$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\mathrm{QLi}_{n,n}$. Tout corrélateur motivique de poids impair $2n+1$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\mathrm{QLi}_{n,n+1}$.
- (b) Le polylogarithme quadrangulaire $\mathrm{QLi}_{n,k}$ s'écrit comme combinaison linéaire de polylogarithmes multiples motiviques de profondeur $\leq n$.

La partie la plus subtile est la preuve de (b), qui s'appuie sur la combinatoire des quadrangulations (dissection en des quadrilatères) des polygones. La relation exacte entre polylogarithmes quadrangulaires et polylogarithmes amassés reste à préciser.

RÉFÉRENCES

- Alexander A. BEILINSON (1985). « Higher regulators and values of L -functions », *J. Soviet Math.* **30** (2), p. 2036–2070.
- (1987). « Height pairing between algebraic cycles », in : *K-theory, arithmetic and geometry (Moscow, 1984–1986)*. T. 1289. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, p. 1–25.
- Alexander A. BEILINSON et Pierre DELIGNE (1994). « Interprétation motivique de la conjecture de Zagier reliant polylogarithmes et régulateurs », in : *Motives (Seattle, WA, 1991)*. T. 55. Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, p. 97–121.
- Spencer BLOCH (1977). « Applications of the dilogarithm function in algebraic K -theory and algebraic geometry ». In : *Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto, 1977)*. Kinokuniya Book Store, Tokyo, 1978, p. 103–114.
- (1978). *Higher regulators, algebraic K-theory, and zeta functions of elliptic curves*. Irvine lecture notes. CRM Monograph Series. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- (1986). « Algebraic cycles and higher K -theory », *Adv. in Math.* **61** (3), p. 267–304.
- Johannes BÖHM (1964). « Zu Coxeters Integrationsmethode in gekrümmten Räumen », *Math. Nachr.* **27**, p. 179–214.
- Armand BOREL (1974). « Stable real cohomology of arithmetic groups », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **7**, p. 235–272.
- (1977). « Cohomologie de SL_n et valeurs de fonctions zêta aux points entiers », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **4** (4), p. 613–636.
- Francis BROWN (2012). « Mixed Tate motives over \mathbb{Z} », *Ann. of Math. (2)* **175** (2), p. 949–976.
- (2013). « Dedekind zeta motives for totally real number fields », *Invent. Math.* **194** (2), p. 257–311.

- _____ (2014). « Single-valued motivic periods and multiple zeta values », *Forum Math. Sigma* **2**, e25.
- _____ (2017). « Notes on motivic periods », *Commun. Number Theory Phys.* **11** (3), p. 557–655.
- José Ignacio BURGOS GIL (2002). *The regulators of Beilinson and Borel*. T. 15. CRM Monograph Series. American Mathematical Society, Providence, RI, p. xii+104. ISBN : 0-8218-2630-1.
- Jean-Louis CATHELIN (1993). « Homologie du groupe linéaire et polylogarithmes (d’après A. B. Goncharov et d’autres) », in : *Séminaire Bourbaki, Vol. 1992/93*. Astérisque No. 216, Société mathématique de France, Exp. No. 772, 5, p. 311–341.
- Frédéric CHAPOTON, Sergey FOMIN et Andrei ZELEVINSKY (2002). « Polytopal realizations of generalized associahedra », *Canad. Math. Bull.* **45** (4), p. 537–566.
- Steven CHARLTON (2017). « A review of Dan’s reduction procedure for multiple polylogarithms », *prépublication arXiv 1703.03961*.
- Steven CHARLTON, Herbert GANGL et Danylo RADCHENKO (2019). « Explicit formulas for Grassmannian polylogarithms », *prépublication arXiv 1909.13869*.
- _____ (2020). « Functional equations of polygonal type for multiple polylogarithms in weight 5, 6 and 7 », *prépublication arXiv 2012.09840*.
- Kuo-Tsai CHEN (1977). « Iterated path integrals », *Bull. Amer. Math. Soc.* **83** (5), p. 831–879.
- Nicușor DAN (2008). « Sur la conjecture de Zagier pour $n = 4$ », *prépublication arXiv 0809.3984*.
- Rob DE JEU (1995). « Zagier’s conjecture and wedge complexes in algebraic K -theory », *Compositio Math.* **96** (2), p. 197–247.
- Pierre DELIGNE (1985). *Lettre à C. Soulé (20/01/1985)*.
- _____ (1989). « Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points », in : *Galois groups over \mathbf{Q} (Berkeley, CA, 1987)*. T. 16. Math. Sci. Res. Inst. Publ. Springer, New York, p. 79–297.
- _____ (2010). « Le groupe fondamental unipotent motivique de $\mathbf{G}_m - \mu_N$, pour $N = 2, 3, 4, 6$ ou 8 », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (112), p. 101–141.
- Pierre DELIGNE et Alexander B. GONCHAROV (2005). « Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **38** (1), p. 1–56.
- Vladimir G. DRINFEL’D (1990). « On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ », *Algebra i Analiz* **2** (4), p. 149–181.
- Johan Louis DUPONT (1987). « The dilogarithm as a characteristic class for flat bundles », *J. Pure Appl. Algebra* **44** (1-3), p. 137–164.
- Johan Louis DUPONT et Chih-Han SAH (1982). « Scissors congruences. II », *J. Pure Appl. Algebra* **25** (2), p. 159–195.
- Vladimir V. FOCK et Alexander B. GONCHAROV (2009). « Cluster ensembles, quantization and the dilogarithm », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **42** (6), p. 865–930.

- Sergey FOMIN et Andrei ZELEVINSKY (2002). « Cluster algebras. I. Foundations », *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2), p. 497–529.
- (2003a). « Cluster algebras. II. Finite type classification », *Invent. Math.* **154** (1), p. 63–121.
- (2003b). « Cluster algebras : notes for the CDM-03 conference », in : *Current developments in mathematics, 2003*. Int. Press, Somerville, MA, p. 1–34.
- Herbert GANGL (2016). « Multiple polylogarithms in weight 4 », *prépublication arXiv 1609.05557*.
- Wolfram GERDES (1991). « The linearization of higher Chow cycles of dimension one », *Duke Math. J.* **62** (1), p. 105–129.
- John K. GOLDEN, Alexander B. GONCHAROV, Marcus SPRADLIN, Cristian VERGU et Anastasia VOLOVICH (2014). « Motivic amplitudes and cluster coordinates », *J. High Energy Phys.* **2014** (1), p. 91.
- Alexander B. GONCHAROV (1991). « The classical trilogarithm, algebraic K -theory of fields and Dedekind zeta functions », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **24** (1), p. 155–162.
- (1993). « Explicit construction of characteristic classes », in : *I. M. Gel'fand Seminar*. T. 16. Adv. Soviet Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, p. 169–210.
- (1994). « Polylogarithms and motivic Galois groups », in : *Motives (Seattle, WA, 1991)*. T. 55. Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, p. 43–96.
- (1995a). « Geometry of configurations, polylogarithms, and motivic cohomology », *Adv. Math.* **114** (2), p. 197–318.
- (1995b). « Polylogarithms in arithmetic and geometry ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*. Birkhäuser, Basel, p. 374–387.
- (1999). « Volumes of hyperbolic manifolds and mixed Tate motives », *J. Amer. Math. Soc.* **12** (2), p. 569–618.
- (2000). « Geometry of the trilogarithm and the motivic Lie algebra of a field », in : *Regulators in analysis, geometry and number theory*. T. 171. Progr. Math. Birkhäuser Boston, Boston, MA, p. 127–165.
- (2001a). « Multiple polylogarithms and mixed Tate motives », *prépublication arXiv 0103059*.
- (2001b). « The dihedral Lie algebras and Galois symmetries of $\pi_1^{(l)}(\mathbb{P}^1 - (\{0, \infty\} \cup \mu_N))$ », *Duke Math. J.* **110** (3), p. 397–487.
- (2002). « Periods and mixed motives », *prépublication arXiv 0202154*.
- (2005a). « Galois symmetries of fundamental groupoids and noncommutative geometry », *Duke Math. J.* **128** (2), p. 209–284.
- (2005b). « Polylogarithms, regulators, and Arakelov motivic complexes », *J. Amer. Math. Soc.* **18** (1), p. 1–60.
- (2013). « A simple construction of Grassmannian polylogarithms », *Adv. Math.* **241**, p. 79–102.

- (2019). « Hodge correlators », *J. reine angew. Math.* **748**, p. 1–138.
- Alexander B. GONCHAROV et Andrey M. LEVIN (1998). « Zagier’s conjecture on $L(E, 2)$ », *Invent. Math.* **132** (2), p. 393–432.
- Alexander B. GONCHAROV et Daniil RUDENKO (2018). « Motivic correlators, cluster varieties and Zagier’s conjecture on $\zeta_F(4)$ », *prépublication arXiv 1803.08585*.
- Richard M. HAIN (1987). « The geometry of the mixed Hodge structure on the fundamental group », in : *Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985)*. T. 46. Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, p. 247–282.
- (1994). « Classical polylogarithms », in : *Motives (Seattle, WA, 1991)*. T. 55. Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, p. 3–42.
- Masaki HANAMURA (1995). « Mixed motives and algebraic cycles. I », *Math. Res. Lett.* **2** (6), p. 811–821.
- Yasutaka IHARA (1989). « The Galois representation arising from $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ and Tate twists of even degree », in : *Galois Groups over \mathbb{Q}* . Math. Sci. Res. Inst. Pub., p. 299–313.
- Bruno KAHN (2005). « Algebraic K -theory, algebraic cycles and arithmetic geometry », in : *Handbook of K -theory. Vol. 1, 2*. Springer, Berlin, p. 351–428.
- Helmut KLINGEN (1962). « Über die Werte der Dedekindschen Zetafunktion », *Math. Ann.* **145**, p. 265–272.
- Ernst E. KUMMER (1840). « Ueber die Transcendenten, welche aus wiederholten Integrationen rationaler Formeln entstehen. (Fortsetzung) », *J. Reine Angew. Math.* **21**, p. 328–371.
- Marc LEVINE (1993). « Tate motives and the vanishing conjectures for algebraic K -theory », in : *Algebraic K -theory and algebraic topology (Lake Louise, AB, 1991)*. T. 407. NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, p. 167–188.
- (1998). *Mixed motives*. T. 57. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, p. x+515. ISBN : 0-8218-0785-4.
- Leonard LEWIN (1981). *Polylogarithms and associated functions*. With a foreword by A. J. Van der Poorten. North-Holland Publishing Co., New York-Amsterdam, p. xvii+359. ISBN : 0-444-00550-1.
- Stephen LICHTENBAUM (1973). « Values of zeta-functions, étale cohomology, and algebraic K -theory ». In : *Algebraic K -theory, II : “Classical” algebraic K -theory and connections with arithmetic (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972)*, 489–501. Lecture Notes in Math., Vol. 342.
- (1984). « Values of zeta-functions at non-negative integers ». In : *Number Theory Noordwijkerhout 1983*. Sous la dir. d’Hendrik JAGER. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, p. 127–138. ISBN : 978-3-540-38906-4.
- Jean-Louis LODAY et Bruno VALLETTE (2012). *Algebraic operads*. T. 346. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer, Heidelberg, p. xxiv+634. ISBN : 978-3-642-30361-6.

- Hideya MATSUMOTO (1969). « Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **2**, p. 1–62.
- John W. MILNOR (1970). « Algebraic K -theory and quadratic forms », *Invent. Math.* **9**, p. 318–344.
- John W. MILNOR et John C. MOORE (1965). « On the structure of Hopf algebras », *Ann. of Math. (2)* **81**, p. 211–264.
- John W. MORGAN (1978). « The algebraic topology of smooth algebraic varieties », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (48), p. 137–204.
- Joseph OESTERLÉ (1993). « Polylogarithmes », in : *Séminaire Bourbaki, Vol. 1992/93*. Astérisque No. 216, Société mathématique de France, Exp. No. 762, 3, p. 49–67.
- Henri POINCARÉ (1884). « Sur les groupes des équations linéaires », *Acta Math.* **4** (1), p. 201–312.
- Daniel QUILLEN (1973). « Higher algebraic K -theory. I ». In : *Algebraic K-theory, I : Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972)*, p. 85–147. Lecture Notes in Math., Vol. 341.
- Dinakar RAMAKRISHNAN (1982). « On the monodromy of higher logarithms », *Proc. Amer. Math. Soc.* **85** (4), p. 596–599.
- (1986). « Analogs of the Bloch-Wigner function for higher polylogarithms », in : *Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Part I, II (Boulder, Colo., 1983)*. T. 55. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, p. 371–376.
- Daniil RUDENKO (2020). « On the Goncharov depth conjecture and a formula for volumes of orthoschemes », *prépublication arXiv 2012.05599*.
- Carl Ludwig SIEGEL (1969). « Berechnung von Zetafunktionen an ganzzahligen Stellen », *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II* **1969**, p. 87–102.
- Christophe SOULÉ (1985). « Opérations en K -théorie algébrique », *Canad. J. Math.* **37** (3), p. 488–550.
- Andrei A. SUSLIN (1984). « Homology of GL_n , characteristic classes and Milnor K -theory », in : *Algebraic K-theory, number theory, geometry and analysis (Bielefeld, 1982)*. T. 1046. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, p. 357–375.
- (1990). « K_3 of a field, and the Bloch group », *Trudy Mat. Inst. Steklov.* **183**, p. 180–199, 229.
- Vladimir VOEVODSKY (2000). « Triangulated categories of motives over a field », in : *Cycles, transfers, and motivic homology theories*. T. 143. Ann. of Math. Stud. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, p. 188–238.
- Gerd WECHSUNG (1991). « Functional equations of hyperlogarithms », in : *Structural properties of polylogarithms*. T. 37. Math. Surveys Monogr. Amer. Math. Soc., Providence, RI, p. 171–184.
- Zdzislaw WOJTKOWIAK (1991). « The basic structure of polylogarithmic functional equations », in : *Structural properties of polylogarithms*. T. 37. Math. Surveys Monogr. Amer. Math. Soc., Providence, RI, p. 205–231.

- (1996). « Functional equations of iterated integrals with regular singularities », *Nagoya Math. J.* **142**, p. 145–159.
- Don ZAGIER (1986). « Hyperbolic manifolds and special values of Dedekind zeta-functions », *Invent. Math.* **83** (2), p. 285–301.
- (1990). « The Bloch-Wigner-Ramakrishnan polylogarithm function », *Math. Ann.* **286** (1-3), p. 613–624.
- (1991). « Polylogarithms, Dedekind zeta functions and the algebraic K -theory of fields », in : *Arithmetic algebraic geometry (Texel, 1989)*. T. 89. Progr. Math. Birkhäuser Boston, Boston, MA, p. 391–430.
- (2007). « The dilogarithm function », in : *Frontiers in number theory, physics, and geometry. II*. Springer, Berlin, p. 3–65.
- Don ZAGIER et Herbert GANGL (2000). « Classical and elliptic polylogarithms and special values of L -series », in : *The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998)*. T. 548. NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, p. 561–615.

Clément Dupont

Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck,
Université de Montpellier, CNRS, Montpellier, France
E-mail : `clement.dupont@umontpellier.fr`