



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**FLUJO DE RICCI COMBINATORIO
EN SUPERFICIES**

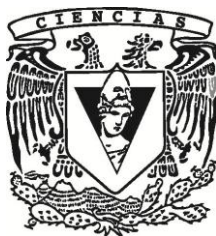
T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

IRVING DANIEL CALDERÓN CAMACHO



**DIRECTOR DE TESIS:
DR. PABLO SUÁREZ SERRATO
2015**

Agradecimientos

A mis papás, Lilia y Javier, por todo su amor y su apoyo incondicional en cada proyecto que emprendo. Gracias por luchar siempre para darnos todo lo necesario a mi y a mi hermano, especialmente, una buena educación; sin su esfuerzo, nada de lo que hasta he logrado, ni lo que haga en el futuro sería posible.

A Ajax, por ser el mejor hermano que alguien pueda tener; por los incontables momentos alegres que hemos compartido, todas las risas, y porque siempre ha estado presente, apoyándome cuando lo necesito, y sé que siempre lo estará.

A Claudia, la única persona que tiene el poder de alegrarme cada día con solo esbozar una sonrisa. Gracias por estar a mi lado para disfrutar juntos los momentos alegres, reír en los momentos malos, y para apoyarme en los momentos difíciles; por todas las aventuras que hemos vivido juntos, y por tantas que vienen.

A la maestra Isabel, por ser quien despertó en mí el gusto por las Matemáticas en las sesiones de “*la selección*” y por enseñarme primero que nada el lado divertido y bello de la materia.

A Toño, por ser mi guía en la Facultad de Ciencias desde el inicio, por tantos interesantes libros que me presta cada vez que lo visito (que juro que algún día le devolveré), por los buenos consejos que siempre me da, por invitarme a participar en la organización de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, y por su amistad.

A León, por ser mi papá académico, por tantos buenos cursos que tomé con él, por los momentos graciosos y las risas en su cubo, y claro, por los jalones de orejas que me da de vez en cuando.

A Roli y a Pablo, porque de las pláticas de las pláticas con ellos, inicialmente con Roli, y después con Pablo, surgió la idea para el tema de esta tesis. Agradezco a Pablo por asesorarme para la realización de este trabajo, por las críticas constructivas y los comentarios que me ayudaron a darle su forma final.

A mis sinodales, León Kushner, Mónica Clapp, Ernesto Rosales y Juan Carlos Fernández, por la cuidadosa revisión de este trabajo y por los valiosos comentarios que ayudaron a mejorarlo.

Finalmente, agradezco al *Programa Exxon Mobil de becas para la investigación científica* por el apoyo que me brindó para la realización de esta tesis. Asimismo agradezco a la UNAM por la beca que me otorgó a través del proyecto IA101013 de PAPIIT, *Aspectos geométricos, dinámicos y probabilísticos de variedades de dimensión 3 y 4*.

Índice general

Introducción	v
1. Superficies	1
1.1. Variedades topológicas	1
1.1.1. Superficies cerradas	3
1.2. Variedades diferenciables	9
1.2.1. El espacio tangente y el haz tangente	10
1.3. Variedades riemannianas	15
1.3.1. Curvas y distancia riemanniana	17
1.3.2. El plano euclideo \mathbb{E}^2	18
1.3.3. El plano hiperbólico \mathbb{H}^2	19
2. Flujo de Ricci Combinatorio	23
2.1. La idea intuitiva	23
2.2. Las definiciones formales	25
2.3. Flujo de Ricci Combinatorio	28
2.4. Evolución de la curvatura	42
2.5. Existencia de soluciones a largo plazo	48
2.6. Un teorema que garantiza la convergencia	52
2.7. Unicidad: las curvaturas determinan a la métrica	57
3. Uniformización de métricas de empacamiento	67
3.1. Uniformización con geometría hiperbólica	70
3.2. Uniformización con geometría euclidea	73
3.3. Una versión más geométrica	75

Introducción

Las ideas y resultados contenidos en esta tesis son producto de la convergencia de dos historias matemáticas que relataremos brevemente. La primera comienza en 1936, cuando Paul Koebe publica en el artículo *Kontaktprobleme der konformen Abbildung* [KP] el siguiente teorema:

Teorema. *Dada cualquier triangulación de la esfera, existen circunferencias en la esfera, una por cada vértice de la triangulación, tales que cualesquiera dos son tangentes si sus respectivos vértices están unidos por una arista, o ajenas, en caso contrario. Más aún, dicho empacamiento de circunferencias es único salvo transformaciones de Möbius.*

Más tarde, en la década de los 70, este resultado es redescubierto independientemente por E. M. Andreev en el artículo *On convex polyhedra in Lobachevski spaces* [A], y por William Thurston en sus famosas notas *Geometry and topology of 3-manifolds* [TW]; el interés de ambos en los empacamientos de circunferencias en la esfera radicaba en su correspondencia con los poliedros hiperbólicos. Thurston además se da cuenta de que la existencia y unicidad de empaques de circunferencias con ciertas características implica resultados de existencia y unicidad en la teoría de 3-variedades; los resultados que obtiene en [TW, cáp. 13] no se limitan a empacamientos tangenciales de circunferencias en la esfera, sino a empacamientos en otras superficies en los que las circunferencias se intersecan con ángulos prescritos. Thurston despierta el interés en estudiar empaques de circunferencias porque las visualiza como un puente entre el mundo discreto y el mundo diferenciable; por ejemplo, conjetura que toda función holomorfa se puede aproximar por medio de funciones puramente combinatorias entre empaques de circunferencias. Esta idea pone a trabajar a un grupo de matemáticos, quienes verifican que Thurston estaba en lo correcto; esto sienta la base para el posterior desarrollo de toda una teoría de funciones analíticas discretas (ver [KS]). En 1991, en el artículo *Un principe variationnel pour les empilements de cercles* [CV], Colin de Verdière señala que los empacamientos tangenciales de circunferencias que realizan una triangulación dada de la esfera, se pueden ver como un punto crítico una funcional estrictamente convexa definida en un espacio adecuado. Esto le permite usar métodos variacionales para probar teoremas de existencia y unicidad de empacamientos tangenciales de circunferencias; incluso obtiene algunos resultados para empacamientos infinitos de circunferencias en abiertos del plano.

Por otra parte, en 1982, Richard Hamilton introduce en el célebre artículo *Three-manifolds with positive Ricci curvature* [HR] el *flujo de Ricci*, un flujo geométrico inspirado en la ecuación de calor que evoluciona la métrica riemanniana de una variedad, esperando que sirviera como herramienta para finalmente demostrar la *conjetura de geometrización* de Thurston, un análogo del teorema de uniformización para variedades de dimensión 3 del cuál la *conjetura de Poincaré* es un corolario. En artículos subsecuentes, Hamilton estableció un programa que serviría como guía para atacar la conjetura de geometrización usando el flujo de Ricci, el cual culminó con éxito en 2003 gracias al trabajo de Grigori Perelman. En dimensión 2, el flujo de Ricci está dado por

$$\frac{dg_{ij}}{dt} = -2K g_{ij},$$

en donde g_{ij} son las componentes de la métrica y K es la curvatura gaussiana de la superficie. Hamilton demostró que dada cualquier superficie cerrada con cualquier métrica riemanniana inicial, la solución del flujo de Ricci existe para todo tiempo, y que después de normalizarla para que tenga volumen fijo, converge a una métrica con curvatura constante conforme a la métrica inicial; sin embargo, la prueba de Hamilton usaba el teorema de uniformización. Sin embargo, Xiuxiong Chen, Peng Lu y Gang Tian dieron una demostración del teorema de uniformización usando el flujo de Ricci. Desde su introducción en 1982, el flujo de Ricci despertó gran interés y hoy día sigue siendo estudiado extensivamente.

La convergencia de estas dos historias la marca la publicación en 2003 del artículo *Combinatorial Ricci flows on surfaces* [C-L], en el que Bennet Chow y Feng Luo continúan con la tendencia iniciada por Collin de Verdière en [CV] de emplear métodos de Análisis para encontrar empaquetamientos de circunferencias en superficies, pero esta vez lo hacen por medio de una ecuación diferencial. Dada una superficie cerrada S y una triangulación de S , los autores introducen un análogo del flujo de Ricci, demuestran que dada cualquier condición inicial, la solución existe para todo tiempo $t \geq 0$, y encuentran condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales estas soluciones convergen, dando así lugar a empaquetamientos de circunferencias que recuperan la estructura combinatoria de la triangulación original, los cuales a su vez nos permiten construir de manera natural métricas riemannianas planas o hiperbólicas en S . Este camino para atacar el problema tiene la virtud de no sólo dar nuevas pruebas de los teoremas de existencia y unicidad de empaquetamientos de circunferencias, sino que también proporciona un método muy eficiente para calcularlas. Esto es importante porque los empaquetamientos de circunferencias tienen aplicaciones prácticas, específicamente en el procesamiento de imágenes.

Para terminar nuestro breve recuento, mencionamos que en 2014, Shing-Tung Yau y sus colaboradores publicaron el artículo *Simplicial Ricci flow* [M], en el que intentan generalizar los resultados en [C-L] a dimensiones más altas. Además, esta tendencia de discretizar la geometría se ha vuelto popular, y como consecuencia hay otros flujos geométricos que ahora tienen análogos combinatorios; por ejemplo, en el artículo *Combinatorial Yamabe flow on surfaces*

[LF] se introduce el flujo de Yamabe combinatorio.

El objetivo de esta tesis es desarrollar con todo detalle los resultados contenidos en [C-L]. El trabajo está dividido en tres capítulos. En el capítulo 1 presentamos la teoría de superficies necesaria para entender los capítulos posteriores: comenzamos introduciendo a las variedades topológicas, incluimos un compendio de resultados de superficies cerradas y discutimos las construcciones y teoría básica de variedades diferenciables y variedades riemannianas. Aquí hacemos un paréntesis para presentar dos ejemplos fundamentales para el desarrollo de este trabajo: el plano euclideo \mathbb{E}^2 y el plano hiperbólico \mathbb{H}^2 .

En el capítulo 2 se introduce el *flujo de Ricci combinatorio*; después de describir las construcciones básicas de empaquetamiento de circunferencias, se tratan los aspectos cualitativos del flujo. Destacamos que se incluye una prueba completa del Lema 2.3, lo que nos permitió detectar un error en [C-L] (ver observación 2.5). A raíz de esto se tuvieron que hacer unas ligeras modificaciones a los resultados del capítulo 3. Resaltamos también la prueba original de la Proposición 2.9, la cual se omite en el artículo.

En el capítulo final, se combinan los resultados del capítulo 2 con consideraciones sobre la topología de las superficies, para obtener condiciones combinatorias necesarias y suficientes sobre la triangulación de una superficie para asegurar que las soluciones del flujo de Ricci combinatorio convergen; esto nos permite encontrar empaquetamientos de circunferencias que generarán métricas riemannianas hiperbólicas o planas en la superficie considerada. Se obtienen como corolario los resultados de Koebe, Andreev y Thurston sobre empaquetamientos tangenciales de circunferencias. De este capítulo destacamos la incorporación de todos los detalles en la demostración de la Proposición 3.12.

Capítulo 1

Superficies

Los objetos que estudiaremos en este trabajo son superficies, es decir, espacios que localmente se parecen a \mathbb{R}^2 . Nos interesará trasladar a superficies las nociones geométricas elementales del plano, tales como ángulos y distancia entre dos puntos, o más generalmente, distancias de trayectorias diferenciables. Para esto, tenemos primero que establecer qué significa que un punto se mueva de manera diferenciable en una superficie. El objetivo de este capítulo es introducir a las superficies y los conceptos básicos relacionados con éstas. Presentaremos las construcciones y estructuras que nos conciernen en el marco más general de variedades, es decir, espacios que localmente se asemejan a \mathbb{R}^n , y lo haremos en tres pasos: primero nos ocuparemos de los aspectos topológicos, luego hablaremos de diferenciability, y finalmente definiremos el concepto de métrica riemanniana, la herramienta principal que nos permitirá hacer mediciones geométricas en las variedades.

1.1. Variedades topológicas

Una **variedad topológica** de dimensión n es un espacio topológico M Hausdorff, 2° numerable, tal que para cada punto $p \in M$ existe un abierto $U \subset M$ homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n , considerando a \mathbb{R}^n con su topología usual, y tal que $p \in U$. A veces indicaremos la dimensión de M con un superíndice M^n . Si $U \subset M$ es un abierto y φ es un homeomorfismo de U a un abierto de \mathbb{R}^n , a la pareja (U, φ) le llamamos **carta** de M . Diremos que (U, φ) es una carta alrededor de un punto p en M si $p \in U$. Un **atlas** de M es un conjunto \mathcal{A} de cartas tal que

$$M = \bigcup \{U \mid (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}.$$

Para familiarizarnos con estos conceptos, veamos un par de ejemplos.

Ejemplo 1.1. Cualquier abierto no vacío U de \mathbb{R}^n con la topología de subespacio es una variedad topológica de dimensión n , y el conjunto que consta sólo de la carta identidad en U es un atlas para esta variedad. \diamond

Ejemplo 1.2. La n -esfera es el conjunto

$$\mathbb{S}^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\| = 1\},$$

con la topología de subespacio de \mathbb{R}^{n+1} . Veremos que ésta es también una variedad topológica de dimensión n . Es Hausdorff y 2° numerable porque lo hereda de \mathbb{R}^{n+1} . Verificaremos la tercera condición de la definición usando la proyección estereográfica. Sean $N = (0, 0, \dots, 0, 1)$ (el polo norte de la esfera) y $U^+ = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$; la proyección estereográfica desde N es la función $\varphi_N : U^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, que geoméricamente se puede describir como sigue: para cualquier punto $s = (s_1, s_2, \dots, s_{n+1})$ en U^+ , el rayo que va de N a s corta al hiperplano $x_{n+1} = 0$ en un único punto $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n, 0)$; definimos entonces $\varphi_N(s) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Para hacer el cálculo explícito de φ_N , notemos que como $(y_1, y_2, \dots, y_n, 0)$ está alineado con N y s , existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$t\mathbf{s} + (1-t)N = (y_1, y_2, \dots, y_n, 0).$$

Si nos fijamos en la entrada $n+1$ de la igualdad anterior, tenemos

$$ts_{n+1} + 1 - t = 0,$$

de donde $t = \frac{1}{1-s_{n+1}}$, y por lo tanto

$$\varphi_N(s_1, s_2, \dots, s_{n+1}) = \frac{1}{1-s_{n+1}}(s_1, s_2, \dots, s_n).$$

Por otra parte, si $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n, 0)$ es un punto en el hiperplano $x_{n+1} = 0$, el segmento con extremos \mathbf{y} y N corta a \mathbb{S}^n en un único punto $s = (s_1, s_2, \dots, s_{n+1})$ distinto de N . Para algún $t \in (0, 1]$, podemos escribir a s como

$$t\mathbf{y} + (1-t)N = (ty_1, ty_2, \dots, ty_n, 1-t),$$

pero s tiene norma 1, entonces

$$1 = t^2(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) + (1-t)^2 = t^2\|\mathbf{y}\|^2 + t^2 - 2t + 1 = t^2(\|\mathbf{y}\|^2 + 1) - 2t + 1,$$

y como $t \neq 0$, entonces

$$t = \frac{2}{\|\mathbf{y}\|^2 + 1},$$

de donde

$$\varphi_N^{-1}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{1}{\|\mathbf{y}\|^2 + 1} (2y_1, 2y_2, \dots, 2y_n, \|\mathbf{y}\|^2 - 1).$$

Ya que tenemos estas expresiones para φ_N y φ_N^{-1} , es claro que ambas son continuas, por lo tanto φ_N es un homeomorfismo. De manera análoga, podemos definir la proyección estereográfica desde el polo sur $S = -N$, como la función $\varphi_S : U^- \rightarrow \mathbb{R}^n$, en donde $U^- = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$, dada por

$$\varphi_S(s_1, s_2, \dots, s_{n+1}) = \frac{1}{1 + s_{n+1}}(s_1, s_2, \dots, s_n).$$

La expresión para la inversa es

$$\varphi_S^{-1}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{1}{1 + \|y\|^2}(2y_1, 2y_2, \dots, 2y_n, 1 - \|y\|^2).$$

De esta manera hemos construido un atlas $\mathcal{A} = \{(U^+, \varphi_N), (U^-, \varphi_S)\}$ de \mathbb{S}^n con dos cartas. \diamond

Si (U, φ) y (V, ψ) son dos cartas de M cuyos dominios se intersecan, las funciones

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V) \quad \text{y} \quad \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$$

son homeomorfismos entre abiertos de \mathbb{R}^n . A cada una de éstas le llamaremos **cambio de carta**.

Finalmente, presentaremos un objeto un poco más general que una variedad topológica, que usaremos para algunas construcciones. Una **variedad con frontera** de dimensión n es un espacio topológico M Hausdorff, 2° numerable, y tal que para cada punto $p \in M$ existe un abierto $U \subset M$ homeomorfo a un abierto del semiespacio

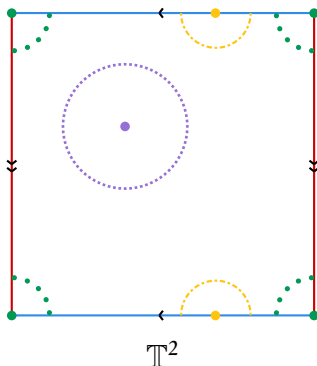
$$S_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\},$$

considerando a S_n con la topología de subespacio de \mathbb{R}^n . La frontera de S_n , que denotaremos ∂S_n , es el conjunto de los puntos en S_n con $x_n = 0$. Si M es una variedad con frontera, decimos que $p \in M$ es un **punto frontera** si existe una carta (de variedad con frontera) (U, φ) tal que $\varphi(p) \in \partial S_n$; si p es un punto frontera de M , entonces $\psi(p) \in \partial S_n$ para toda carta (V, ψ) alrededor de p ; la demostración de este hecho se escapa de nuestros objetivos. La **frontera** de M es el conjunto de puntos frontera de M , y será denotada ∂M .

1.1.1. Superficies cerradas

En este trabajo, nuestros objetos de estudio principales son superficies, es decir, variedades topológicas de dimensión 2, a las que adicionalmente pediremos que sean compactas y conexas; por comodidad, a una superficie que tenga estas dos características le llamaremos **superficie cerrada**. Esta sección es un compendio de la teoría de superficies cerradas necesaria para entender los resultados de esta tesis. Específicamente, abordaremos: triangulación de superficies, el teorema de clasificación y la característica de Euler. Hasta ahora, la única superficie cerrada que hemos introducido es la 2-esfera \mathbb{S}^2 . Comenzaremos presentando otras dos superficies cerradas importantes.

Ejemplo 1.3. El toro, que denotaremos \mathbb{T}^2 , es el espacio cociente que se obtiene del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, al hacer las identificaciones $(0, t) \sim (1, t)$ y $(t, 0) \sim (t, 1)$, para cada $t \in [0, 1]$. En la figura que aparece abajo se muestran vecindades euclidianas de los, aparentemente, tres tipos distintos de puntos en el toro, con lo cual podemos convencernos de que efectivamente es una superficie.



Otras dos maneras comunes de definir a \mathbb{T}^2 son:

- El espacio $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ con la topología producto.
- El subespacio de \mathbb{R}^3 que se obtiene al girar con respecto al eje Z a la circunferencia $(y - 2)^2 + z^2 = 1$, contenida en el plano YZ . \diamond

Ejemplo 1.4. El plano proyectivo \mathbb{P}^2 es la superficie que se obtiene del disco

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\},$$

identificando cada punto en la frontera con su antípodo. \diamond

Triangulación de superficies.

Una triangulación de una superficie es una manera de descomponer a la superficie en “pedazos” sencillos (triángulos). Hay varias maneras equivalentes de definir triangulación, aquí lo haremos en términos de complejos simpliciales.

Consideremos $k + 1$ puntos distintos en \mathbb{R}^n , x_0, x_1, \dots, x_k . Diremos que el conjunto

$$\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$$

es **afinmente independiente** si se satisface cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

- A1.** El conjunto $\{x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0\}$ es linealmente independiente.

A2. Para cualesquiera $t_0, t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$ tales que

$$\sum_{j=0}^k t_j = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{j=0}^k t_j \mathbf{x}_j = \mathbf{0},$$

se tiene que $t_0 = t_1 = \dots = t_k = 0$.

Supongamos que $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ es un conjunto afinmente independiente de $k + 1$ puntos en \mathbb{R}^n . Definimos el **simplejo** generado por $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ como el conjunto

$$[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k] = \left\{ \sum_{j=0}^k t_j \mathbf{x}_j \mid t_0, \dots, t_k \geq 0, \sum_{j=0}^k t_j = 1 \right\},$$

con la topología de subespacio de \mathbb{R}^n . Cada uno de los puntos \mathbf{x}_j son los **vértices del simplejo**. Diremos que $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k]$ tiene **dimensión k** . Entonces, los simplejos de dimensión 0, 1, 2 y 3 son puntos, segmentos, triángulos y tetraedros, respectivamente. Para cada punto $\sum_{j=0}^k t_j \mathbf{x}_j \in [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k]$, los coeficientes t_0, t_1, \dots, t_k se conocen como las **coordenadas baricéntricas** del punto, que por la condición **A2**, son únicas. Con ayuda de las coordenadas baricéntricas es fácil mostrar que cualquier simplejo de dimensión k es homeomorfo a $[0, 1]^k$.

Sea σ un simplejo de dimensión k . Una **cara** de σ es cualquier simplejo generado por un subconjunto de los vértices de σ . Un **complejo simplicial (geométrico finito)** es un conjunto finito \mathcal{K} de simplejos contenidos en \mathbb{R}^n , para algún entero positivo fijo n , que cumple las siguientes dos condiciones:

CS1. Si $\sigma \in \mathcal{K}$, entonces todas las caras de σ también están en \mathcal{K} .

CS2. La intersección de cualesquiera dos simplejos en \mathcal{K} es cara de ambos.

Definimos la **dimensión del complejo simplicial \mathcal{K}** como el máximo de las dimensiones de los simplejos en \mathcal{K} . El **poliedro** de \mathcal{K} es el conjunto $\cup \mathcal{K}$ con la topología de subespacio de \mathbb{R}^n ; lo demostraremos $\|\mathcal{K}\|$.

Una **triangulación** de una superficie cerrada S es un homeomorfismo del poliedro de un complejo simplicial de dimensión 2, en el que cada arista es cara de exactamente dos triángulos, a S .

Teorema 1.5 (Triangulación de superficies compactas). *Toda superficie compacta admite una triangulación.*

El Teorema 1.5 es crucial para entender mejor a las superficies cerradas, ya que nos asegura que las podemos construir pegando triángulos siguiendo dos reglas muy sencillas: a cada triángulo se le pega exactamente un triángulo en cada lado, y si dos triángulos se intersecan, tiene que ser en un vértice o en una arista. Haciendo uso del Teorema 1.5 se puede dar una clasificación completa de las superficies cerradas (que más adelante enunciaremos) y se puede probar que toda superficie cerrada admite una estructura diferenciable. Aunque no lo necesitaremos para este trabajo, no está de más señalar que también las superficies no compactas son triangulables, aunque para esto debemos permitir que los complejos simpliciales sean infinitos, y hay que imponerles una condición técnica de finitud local. La prueba de este resultado puede consultarse en [TC].

Suma conexa de superficies y el teorema de clasificación

Hasta el momento, tenemos sólo tres ejemplos de superficies cerradas: la 2-esfera, el toro y el plano proyectivo. Introduciremos ahora la suma conexa de superficies, que es una operación que nos permitirá combinar dos superficies para formar una nueva; de esta manera, podremos construir más superficies cerradas a partir de las tres que ya conocemos. Lo sorprendente es que cualquier superficie cerrada se puede obtener de esta forma.

Un **disco coordinado regular** en una superficie S es un abierto $D \subset S$ para el cual existe una carta (U, φ) de S tal que $D \subset U$ y, para algunos $r_1 > r_2 > 0$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, se tiene que $\varphi[U] = B_{r_1}(\mathbf{x})$ y $\varphi[D] = B_{r_2}(\mathbf{x})$. Sean S_1 y S_2 dos superficies, y $D_1 \subset S_1, D_2 \subset S_2$ discos coordinados regulares. Entonces $S'_1 = S_1 \setminus D_1$ y $S'_2 = S_2 \setminus D_2$ son superficies con frontera homeomorfa a \mathbb{S}^1 . Consideremos un homeomorfismo cualquiera $h : \partial S'_1 \rightarrow \partial S'_2$. La **suma conexa** de S_1 y S_2 , que denotaremos $S_1 \# S_2$, es la superficie que se obtiene de la unión disjunta $S'_1 \sqcup S'_2$, haciendo la identificación $p \sim h(p)$ para cada $p \in \partial S'_1$. Le llamamos “la suma conexa” cualquier elección de D_1, D_2 y h da lugar a superficies homeomorfas. Un esbozo de la demostración de este hecho se puede encontrar en [LTM, pág. 273, prob. 10-8]

Es fácil convencerse, al menos intuitivamente, de que para cualquier superficies S , la suma conexa $S \# \mathbb{S}^2$ es homeomorfa a S , así que en realidad hacer suma conexa con \mathbb{S} no aporta nuevos ejemplos. Podemos sumar varias copias de \mathbb{T}^2 , obteniendo así el doble toro $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$, el triple toro $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$, etc. De igual manera, podemos sumar varias copias de \mathbb{P}^2 ; a $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ se le conoce como la **botella de Klein**. Para cada entero positivo n , denotaremos $n\mathbb{T}^2$ y $n\mathbb{P}^2$ a la suma conexa de n copias del toro y el plano proyectivo, respectivamente. Si combinamos toros y planos proyectivos no obtenemos nuevas superficies debido a que $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2 \simeq \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$. Ahora podemos enunciar la clasificación completa de las superficies cerradas.

Teorema 1.6 (Clasificación de superficies cerradas). *Toda superficie cerrada es homeomorfa a exactamente una de las siguientes:*

- La esfera \mathbb{S}^2 .

- La suma conexa de n copias de \mathbb{T}^2 .
- La suma conexa de n copias de \mathbb{P}^2 .

La prueba de este teorema puede consultarse en [LTM, pág. 267, Teo. 10.22]. Para este trabajo también nos será útil saber cuáles son todas las posibles superficies cerradas con frontera. En esta dirección, se tiene el siguiente resultado, cuya prueba se basa en que la única 1-variedad compacta es \mathbb{S}^1 .

Proposición 1.7. *Toda superficie cerrada con frontera es homeomorfa a una superficie cerrada a la que se le han quitado una cantidad finita de discos coordenados regulares.*

La característica de Euler

Supongamos que nos dan una superficie S . Sabemos que S es homeomorfa a alguna de las superficies del Teorema 1.6, pero, ¿cómo saber a cuál? Para ayudarnos a averiguar esto, existen muchos invariantes topológicos que le podemos asociar a una superficie. Uno de estos es la característica de Euler, que definiremos en esta sección en términos de triangulaciones.

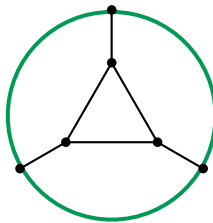
Sea S una superficie cerrada, con o sin frontera, y $\Phi : ||\mathcal{K}|| \rightarrow S$ una triangulación de S . Denotemos V, A y T a los conjuntos de vértices, aristas y caras de \mathcal{K} , respectivamente. Definimos la **característica de Euler** de S (con respecto a Φ) como el número

$$\chi(S) = |V| - |A| + |T|.$$

Una prueba elemental de que $\chi(S)$ no depende de la triangulación elegida para el caso de la 2-esfera y del toro, se puede encontrar en [W, pág. 59, Prop. 3.13]. La demostración del caso general se hace comúnmente usando grupos de homología, como por ejemplo en [LTM, pág. 373, Teo. 13.36].

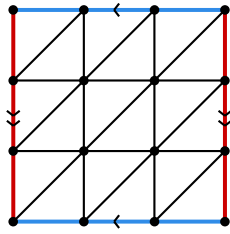
Ejemplo 1.8. La 2-esfera, el toro y el plano proyectivo tienen característica de Euler 2, 0 y 1, respectivamente; los cálculos se pueden hacer usando las triangulaciones representadas en la figura que aparece abajo. \diamond

\mathbb{S}^2



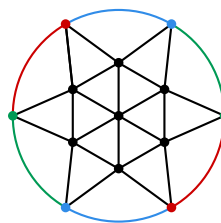
$\chi(\mathbb{S}^2) = 4 - 6 + 4 = 2$

\mathbb{T}^2



$\chi(\mathbb{T}^2) = 9 - 27 + 18 = 0$

\mathbb{P}^2



$\chi(\mathbb{P}^2) = 10 - 27 + 18 = 1$

Procederemos ahora a calcular la característica de Euler de todas las superficies cerradas, para lo cual nos será de gran utilidad saber cómo se comporta $\chi(S)$ con respecto a la suma conexa.

Lema 1.9. *Si S_1 y S_2 son superficies cerradas, entonces*

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

Demostración. Elijamos triangulaciones de S_1 y S_2 suficientemente finas de tal manera que tengan triángulos Δ_1 y Δ_2 , respectivamente, tales que sus interiores son discos coordinados regulares. Consideremos un homeomorfismo $h : \partial \Delta_1 \rightarrow \partial \Delta_2$ que mande vértices en vértices. Al hacer la suma conexa por medio de h , las triangulaciones de S_1 y S_2 dan lugar a una triangulación de $S_1 \# S_2$ con $|V_1| + |V_2| - 3$ vértices, $|A_1| + |A_2| - 3$ aristas y $|T_1| + |T_2| - 2$ triángulos. De esto se sigue el resultado ■

Usando el ejemplo 1.8 y el Lema 1.9, es sencillo calcular la característica de Euler de cualquier superficie cerrada.

Corolario 1.10. *Sea n un entero positivo. Se cumple lo siguiente:*

- $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$,
- $\chi(n\mathbb{T}^2) = 2 - 2n$,
- $\chi(n\mathbb{P}^2) = 2 - n$.

Si S es una superficie cerrada con frontera que se obtiene al quitar k discos de una superficies cerrada S' , podemos considerar una triangulación suficientemente fina de S' y suponer que cada uno de esos discos es el interior de un triángulo. De esta observación sencilla se sigue el resultado próximo.

Corolario 1.11. *Si S es una superficie cerrada con frontera, homeomorfa a una superficie cerrada S' sin k discos, entonces*

$$\chi(S) = \chi(S') - k.$$

Entonces podemos afirmar lo siguiente.

Corolario 1.12. *La única superficies cerrada S con frontera y con característica de Euler 1 es el disco*

1.2. Variedades diferenciables

Ya que introdujimos las variedades topológicas, que son espacios que localmente homeomorfos a \mathbb{R}^n , es razonable entonces pensar que se puede hacer Cálculo en ellas. Lo primero que deberíamos definir es lo que significa que una función F entre variedades M y N sea diferenciable en un punto p . Como éste es un concepto local, podemos hacer la definición usando cartas específicas alrededor de p y $F(p)$, para así fijarnos en una función entre abiertos de espacios euclidianos, donde sí sabemos qué es una función diferenciable. El problema con esto es que la definición que demos no debe depender de alguna carta particular. Para resolver este problema, podemos considerar solamente cartas en la variedad cuyos cambios de carta sean diferenciables.

Sea M una variedad topológica de dimensión n . Un **atlas diferenciable** de M es un atlas tal que todos sus cambios de carta son funciones diferenciables. A un atlas diferenciable maximal le llamaremos **estructura diferenciable**. Finalmente, una **variedad diferenciable** es una variedad topológica dotada de una estructura diferenciable. Dado un atlas diferenciable \mathcal{A} , es fácil ver que hay una única estructura diferenciable que contiene a \mathcal{A} , precisamente el conjunto de todas las cartas (U, φ) tales que cualquier cambio de esta carta a una de \mathcal{A} es diferenciable. Entonces, para asignar una estructura diferenciable a una variedad, basta con darle un atlas diferenciable. Los dos ejemplos que dimos en la sección anterior son también ejemplos de variedades diferenciables.

Ejemplo 1.13. Para cualquier abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, el atlas que consta únicamente de la función identidad en U es diferenciable. \diamond

Ejemplo 1.14. El atlas \mathcal{A} que dimos a la n -esfera \mathbb{S}^n en el ejemplo 1.2 es diferenciable porque las funciones

$$(y_1, y_2, \dots, y_n) \xrightarrow{\varphi_N^{-1}} \frac{1}{1 + \|y\|^2} (2y_1, 2y_2, \dots, 2y_n, \|y\|^2 - 1) \xrightarrow{\varphi_S} \frac{1}{\|y\|^2} (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

y

$$(y_1, y_2, \dots, y_n) \xrightarrow{\varphi_S^{-1}} \frac{1}{1 + \|y\|^2} (2y_1, 2y_2, \dots, 2y_n, 1 - \|y\|^2) \xrightarrow{\varphi_N} \frac{1}{\|y\|^2} (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

son diferenciables. \diamond

Si M y N son variedades diferenciables, una función continua $F : M \rightarrow N$ es **diferenciable en un punto** $p \in M$ si existen cartas (U, φ) y (V, ψ) de M y N alrededor de p y $F(p)$, respectivamente, tales que la función $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable en $\varphi(p)$. Decimos que F es una **función diferenciable** si es diferenciable en todo punto de M . Un **difeomorfismo** es una función diferenciable biyectiva con inversa diferenciable. Al conjunto de funciones diferenciables de M a \mathbb{R} lo denotaremos $\mathcal{C}^\infty(M)$.

Es importante notar que las variedades topológicas y las diferenciables son conceptos diferentes. En dimensiones 1, 2 y 3, toda variedad tiene una única estructura diferenciable, salvo difeomorfismo. En dimensiones más altas, podemos encontrar todo tipo de rarezas, desde variedades que no admiten ninguna estructura diferenciable, hasta otras que tienen más de una, o incluso infinitas. El primer ejemplo de una variedad topológica que no admite ninguna estructura diferenciable fue construido en 1960 por Michel Kervaire en [KM]; se trata de una variedad de dimensión 10. En 1953, John Milnor construyó en [M] siete estructuras diferenciables no difeomorfas de \mathbb{S}^7 , a las cuales llamó esferas exóticas. Más tarde, en 1982, Michael Freedman dio ejemplos de algunas estructuras diferenciables no difeomorfas en \mathbb{R}^4 ; como se probaría más adelante, de hecho \mathbb{R}^4 tiene c estructuras diferenciables distintas.

1.2.1. El espacio tangente y el haz tangente

En términos simples, las funciones diferenciables usuales entre abiertos de espacios euclidianos son funciones que se pueden aproximar localmente con funciones muy sencillas: funciones lineales. La diferencial en un punto de una función diferenciable F entre abiertos de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m es esa transformación lineal $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ que más parece a F cerca del punto. Para extender este concepto a variedades, necesitamos primero encontrar para cada punto de la variedad, un espacio vectorial que la aproxime en cierto sentido. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $p \in U$, la elección natural para aproximar U en p es una copia de \mathbb{R}^n , que por lo general uno visualiza anclada a p . A los elementos de este espacio vectorial les llamamos vectores tangentes en p . A primera vista no es evidente cómo generalizar esto a variedades diferenciables, por lo que será útil interpretar a los vectores tangentes de otra manera. Cada $v \in \mathbb{R}^n$ define una derivación direccional en p , que no es más que la función $D_p^v : \mathcal{C}^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$ dada para cualquier $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ por

$$D_p^v f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}.$$

Cuando v sea e_i , el i -ésimo vector de la base canónica de \mathbb{R}^n , usaremos la notación $\frac{\partial_p}{\partial x_i}$ en lugar de $D_p^{e_i}$. Sabemos que D_p^v es una función lineal y que cumple la **regla de producto**, es decir, para cualesquiera funciones $f, g \in \mathcal{C}^\infty(U)$ se tiene

$$D_p^v(fg) = (D_p^v f)g(p) + f(p)D_p^v g.$$

Motivados por esto, hacemos la definición siguiente: sean M una n -variedad diferenciable y p un punto de M . Una **derivación** en p es una función lineal $X_p : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple la regla del producto

$$X_p(fg) = (X_p f)g(p) + f(p)X_p g,$$

para cualesquiera funciones $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, denotaremos también λ a la función constante λ en M . Observemos que por la regla del producto tenemos

$$X_p 1 = X_p 1 + X_p 1,$$

de donde $X_p 1 = 0$. De la linealidad de X_p se sigue que $X_p \lambda = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Es fácil convenirse de que las derivaciones en p forman un espacio vectorial, al cual llamaremos el **espacio tangente** a M en p , y será denotado $T_p M$. A cada elemento $X_p \in T_p M$ le llamaremos también **vector tangente** a M en p . Al igual que con las derivaciones direccionales convencionales, el valor de una derivación en una función dependerá solamente de los valores de ésta cerca de p , como lo muestra el lema siguiente.

Lema 1.15. Sean $U \subset M$ un abierto, p un punto en U y X_p un vector tangente a M en p . Si $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ son funciones que coinciden en U , entonces $X_p f = X_p g$.

Demostración. Por la linealidad de X_p , bastará con probar que si $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ es una función que se anula en U , entonces $X_p h = 0$. Sean (V, φ) una carta alrededor de p , con $V \subset U$, y $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B_\varepsilon}(\varphi(p)) \subset \varphi[V]$. Consideremos una función diferenciable $\bar{h} : \varphi[V] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\bar{h}[\overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\varphi(p))}] = \{1\} \quad \text{y} \quad \bar{h}[\varphi[V] \setminus B_\varepsilon(\varphi(p))] = \{0\}.$$

Definimos la función $\tilde{h} \in \mathcal{C}^\infty(M)$ como

$$\tilde{h}(q) = \begin{cases} \bar{h} \circ \varphi(q), & \text{si } q \in V, \\ 0, & \text{si } q \notin V. \end{cases}$$

Como $\tilde{h}h = 0$, tenemos

$$0 = X_p(\tilde{h}h) = (X_p \tilde{h})h(p) + \tilde{h}(p)X_p h = X_p h,$$

como queríamos. ■

Si $U \subset M$ es un abierto y p un punto en U , con ayuda del resultado anterior podemos identificar a $T_p U$ con $T_p M$.

Ahora estamos listos para definir la diferencial de una función entre variedades. Si $F : M \rightarrow N$ es una función diferenciable entre variedades diferenciables, la **diferencial** de F en p es la transformación lineal $F_*^p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ dada por

$$(F_*^p X_p)f = X_p(f \circ F),$$

para cualesquiera $X_p \in T_p M$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$. La diferencial se comporta bien con respecto a la composición de funciones: si $F : M \rightarrow N$ y $G : N \rightarrow P$ son funciones diferenciables, entonces

$$(G \circ F)_*^p = G_*^{F(p)} \circ F_*^p,$$

a lo que conocemos como **regla de la cadena**. Además, si denotamos I_X a la función identidad en cualquier conjunto X , se tiene $(I_M)_*^p = I_{T_p M}$. En particular, si (U, φ) es una carta alrededor de p , se cumple

$$(\varphi^{-1})_*^{\varphi(p)} \circ \varphi_*^p = (\varphi^{-1} \circ \varphi)_*^p = I_{T_p M} \quad \text{y} \quad \varphi_*^p \circ (\varphi^{-1})_*^{\varphi(p)} = (\varphi \circ \varphi^{-1})_*^{\varphi(p)} = I_{T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n},$$

por lo tanto $T_p M$ y $T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n$ son espacios vectoriales isomorfos. Para conocer la estructura de $T_p M$ bastará con estudiar a $T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n$.

Lema 1.16 (Hadamard). Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto convexo, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ un punto en U y $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Existen funciones diferenciables $g_1, g_2, \dots, g_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{q}) + \sum_{i=1}^n (x_i - q_i) g_i(\mathbf{x})$$

para todo $\mathbf{x} \in U$.

Demostración. Si $\mathbf{x} \in U$, de la convexidad de U se sigue que $\mathbf{q} + t(\mathbf{x} - \mathbf{q})$ también está en U para todo $t \in [0, 1]$. Por el teorema fundamental de Cálculo tenemos

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{q}) &= \int_0^1 \frac{dg}{dt}(\mathbf{q} + t(\mathbf{x} - \mathbf{q})) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{q} + t(\mathbf{x} - \mathbf{q})) (x_i - q_i) dt \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - q_i) \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{q} + t(\mathbf{x} - \mathbf{q})) dt, \end{aligned}$$

entonces podemos tomar $g_i(\mathbf{x}) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{q} + t(\mathbf{x} - \mathbf{q})) dt$. ■

Con ayuda de este lema podemos dar una base de $T_{\mathbf{q}} \mathbb{R}^n$.

Proposición 1.17. El conjunto

$$\beta = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$$

es base de $T_{\mathbf{q}} \mathbb{R}^n$.

Demostración. Sean a_1, a_2, \dots, a_n números reales tales que

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} = 0.$$

Para cualquier $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, si evaluamos la expresión anterior en la j -ésima proyección $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_j$, obtenemos $a_j = 0$; por lo tanto β es un conjunto de vectores linealmente independiente. Para probar que β genera a $T_q \mathbb{R}^n$, tomemos a un vector X_q tangente en q y cualquier función diferenciable $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Por el Lema 1.16, existen funciones $g_1, g_2, \dots, g_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tales que

$$g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{q}) + \sum_{i=1}^n (x_i - q_i) g_i(\mathbf{x}).$$

Como las derivaciones se anulan en constantes, se tiene

$$\begin{aligned} \left(X_q - \sum_{j=1}^n X_q(x_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) g &= \sum_{i=1}^n X_q((x_i - q_i) g_i) - \sum_{j=1}^n X_q(x_j) \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} ((x_k - q_k) g_k) \\ &= \sum_{i=1}^n X_q(x_i) g_i(q) - \sum_{j=1}^n X_q(x_j) g_j(q) = 0, \end{aligned}$$

de donde

$$X_q = \sum_{i=1}^n (X_q x_i) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

y por lo tanto las derivaciones $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ generan a $T_q \mathbb{R}^n$. ■

En consecuencia, si M es variedad diferenciable, la carta (U, φ) da coordenadas locales (x_1, x_2, \dots, x_n) y $p \in U$, el conjunto

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$$

es base de $T_p M$, en donde

$$\frac{\partial}{\partial x_i} := (\varphi^{-1})_* \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(p)}.$$

Llamaremos a éstas las **derivaciones parciales** con respecto a (U, φ) . Sean $F : M^n \rightarrow N^m$ una función diferenciable y p un punto de M . Consideremos cartas (U, φ) y (V, ψ) alrededor de p y $F(p)$, respectivamente. Sean

$$\beta_p = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\} \quad \text{y} \quad \gamma_{F(p)} = \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m} \right\}$$

las derivaciones parciales en p y $F(p)$ con respecto a sus respectivas cartas. La siguiente proposición nos dice cuál es la matriz de representación de F_*^p con respecto a β_p y $\gamma_{F(p)}$.

Proposición 1.18. Sean $\bar{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} \gamma F_1, F_2, \dots, F_m : \varphi[U] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que $\bar{F} = (F_1, F_2, \dots, F_m)$. Entonces la matriz de representación de F_*^p con respecto a β_p y $\gamma_{F(p)}$ es

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\varphi(p)) \right)_{i,j}.$$

Demostración. Sabemos que para cada $1 \leq i \leq n$ se tiene

$$F_*^p \frac{\partial_p}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^m \left(F_*^p \frac{\partial_p}{\partial x_i} \right) (y_j \circ \psi) \frac{\partial_{F(p)}}{\partial y_j}.$$

Por la definición de diferencial, para cada $1 \leq j \leq m$ tenemos

$$\begin{aligned} \left(F_*^p \frac{\partial_p}{\partial x_i} \right) (y_j \circ \psi) &= \frac{\partial_p}{\partial x_i} y_j \circ \psi \circ F = \frac{\partial_{\varphi(p)}}{\partial x_i} y_j \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1} \\ &= \frac{\partial_{\varphi(p)}}{\partial x_i} y_j \circ \bar{F} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\varphi(p)), \end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado. ■

Un concepto fundamental en la teoría de variedades diferenciables es el de campo vectorial, que en términos sencillos es una función que asigna a cada punto $p \in M$ un vector tangente $X_p \in T_p M$. Para dar una definición formal de campo vectorial, construiremos una variedad diferenciable pegando todos los espacios tangentes $T_p M$. Sea

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M,$$

en donde \bigsqcup denota a la unión disjunta. Tenemos una función natural $\pi : TM \rightarrow M$ que manda a cada vector tangente $X_p \in T_p M$ a p . Consideremos ahora a un atlas diferenciable \mathcal{A} de M . Para cada carta $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, definimos la función $\tilde{\varphi} : \pi^{-1}[U] \rightarrow \varphi[U] \times \mathbb{R}^n$ como

$$\tilde{\varphi} \left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial_p}{\partial x_i} \right) = (\varphi(p), a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Damos a TM la única topología que hace a π continua y a cada $\tilde{\varphi}$ un homeomorfismo (cabe señalar que esta topología no depende del atlas de M que escogimos). De esta manera TM es una variedad topológica y el atlas

$$\mathcal{B} = \{(\pi^{-1}[U], \tilde{\varphi}) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}$$

es diferenciable, ya que si (U, φ) y (V, ψ) son cartas de M cuyos dominios se intersecan, se tiene que

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x, a_1, a_2, \dots, a_n) = \left(\psi \circ \varphi^{-1}(x), \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x), \dots, \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(x) \right),$$

en donde $\psi \circ \varphi^{-1} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$. Consideraremos a TM como variedad diferenciable con la estructura diferenciable generada por \mathcal{B} , y la llamaremos el **haz tangente** de M . Habiendo ya construido el haz tangente, tenemos una manera natural de precisar qué significa asignar a puntos de la variedad vectores tangentes de manera diferenciable. Un **campo vectorial** en M es una función diferenciable $X : M \rightarrow TM$ tal que $\pi \circ X = I_M$. El conjunto de campos vectoriales en M será denotado $\mathcal{T}(M)$. Si X es un campo vectorial en M , usaremos la notación X_p en lugar de $X(p)$. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, por comodidad pensaremos a los campos vectoriales $X \in \mathcal{T}(U)$ como funciones diferenciables de U a \mathbb{R}^n ; sólo hay que hacer la identificación $\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \mapsto (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

1.3. Variedades riemannianas

Ya que tenemos variedades en las que podemos hacer Cálculo, el siguiente paso es buscar la manera de medir cantidades geométricas básicas, tales como longitudes de curvas diferenciables, ángulos entre curvas, área y volumen. En \mathbb{R}^n hacemos todas estas mediciones por medio del producto interior canónico de \mathbb{R}^n . Para imitar esto en variedades, asignaremos un producto interior a cada espacio tangente.

Sea M^n una variedad diferenciable. Una **métrica riemanniana** en M es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que asigna a cada punto $p \in M$ un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ en $T_p M$ de manera diferenciable en el siguiente sentido: para cualesquiera campos vectoriales X, Y definidos en un abierto $V \subset M$, la función

$$p \mapsto \langle X_p, Y_p \rangle_p$$

es diferenciable. Una **variedad riemanniana** es una pareja $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ que consta de una variedad diferenciable M y una métrica riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en M . Es importante observar que para verificar la diferenciable de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bastará con exhibir un atlas \mathcal{A} de M tal que, para cada carta (U, φ) en \mathcal{A} y para cualesquiera $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, la función $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$$

sea diferenciable. Si (U, φ) es una carta de M , a U le podemos dar siempre la métrica canónica $\langle \cdot, \cdot \rangle^\varphi$ tal que $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$ para todo $p \in U$. Podemos pegar todas estas métricas riemannianas locales para construir una métrica riemanniana en M por medio de una partición de la

unidad. Si \mathcal{U} es una cubierta abierta de M , una **partición de la unidad (diferenciable)** de M subordinada a \mathcal{U} es una familia de funciones

$$\mathcal{P} = \{f_U \in \mathcal{C}^\infty(M) \mid U \in \mathcal{U}\}$$

que cumple las siguientes condiciones para cualesquiera $U \in \mathcal{U}$ y $p \in M$:

$$PU1 \quad 0 \leq f_U(p) \leq 1,$$

$$PU2 \quad \text{sop} f \subset U,$$

PU3 existe un abierto $V \subset M$ tal que $p \in V$ y tal que

$$\{U \in \mathcal{U} \mid \text{sop} f_U \cap V \neq \emptyset\},$$

es un conjunto finito.

PU4

$$\sum_{U \in \mathcal{U}} f_U(p) = 1$$

Para demostrar que siempre existen métricas riemannianas en cualquier variedad diferenciable, necesitamos el teorema siguiente, cuya prueba puede consultarse en [LSM, pág. 43, Teo. 2.23].

Teorema 1.19. *Sean M una variedad diferenciable y \mathcal{U} una cubierta abierta de M . Entonces existe una partición de la unidad \mathcal{P} subordinada a \mathcal{U} .*

Ahora estamos listos para construir una métrica riemanniana en M . Elijamos un atlas \mathcal{A} de M y sea \mathcal{P} una partición de la unidad subordinada a

$$\mathcal{U} = \{U \mid (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}.$$

Para cada (U, φ) en \mathcal{A} , sea $\langle \cdot, \cdot \rangle^\varphi$ la métrica riemanniana canónica inducida en U por la carta. Si para cada $p \in M$, definimos

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p = \sum_{(U, \varphi) \in \mathcal{A}} f_U(p) \langle \cdot, \cdot \rangle_p^\varphi,$$

ésta es una métrica riemanniana en M porque en cada punto es suma convexa de productos interiores.

La noción de equivalencia de variedades riemannianas es la isometría. Dadas dos variedades riemannianas $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle')$, una **isometría** de M a N es un difeomorfismo $F_M \rightarrow N$ tal que $F_*^p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ es una isometría (lineal) para cada $p \in M$.

1.3.1. Curvas y distancia riemanniana

Sea $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ una variedad riemanniana. Una **curva diferenciable** en M es una función diferenciable α de un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ a M ; si el intervalo I no es abierto, que la curva sea diferenciable significa que es la restricción de una curva diferenciable β definida en un intervalo abierto \tilde{I} que contiene a I . Cuando hagamos referencia a una curva, daremos por hecho que es diferenciable, a menos que se indique lo contrario. Una reparametrización de una curva α definida en un intervalo I es una curva $\beta : \tilde{I} \rightarrow M$ de la forma $\beta = \alpha \circ \varphi$, para algún difeomorfismo $\varphi : \tilde{I} \rightarrow I$. Un **segmento de curva** es una curva cuyo dominio es un intervalo compacto $[a, b]$. El **campo de velocidades de una curva** $\alpha : I \rightarrow M$ es la función $\dot{\alpha} : I \rightarrow TM$ dada por

$$\dot{\alpha}(t) = \alpha_*^t \left(\frac{d}{dt} \right).$$

Con ayuda del campo de velocidades de una curva, podemos extender de manera natural las definiciones clásicas de ángulo entre dos curvas y de longitud a variedades riemannianas. Definimos el **ángulo entre dos curvas** α y β que se intersecan en el punto $p = \alpha(t) = \beta(s)$ y tales que $\dot{\alpha}(t) \neq 0 \neq \dot{\beta}(s)$ como

$$\arccos \left(\frac{\langle \dot{\alpha}(t), \dot{\beta}(s) \rangle_p}{\|\dot{\alpha}(t)\| \cdot \|\dot{\beta}(s)\|} \right).$$

También definimos la **longitud de una curva** $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ como

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| dt.$$

Es fácil comprobar que la longitud de una curva no depende de la parametrización: sea $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ una curva y $\alpha \circ \varphi : [c, d] \rightarrow M$ una reparametrización de α . Por la regla de la cadena tenemos que $(\alpha \circ \varphi)_*^u \left(\frac{d}{du} \right) = \varphi'(u) \dot{\alpha}(\varphi(u))$, entonces, haciendo el cambio de variable $t = \varphi(u)$ obtenemos

$$L(\alpha \circ \varphi) = \int_c^d \|\dot{\alpha}(\varphi(u))\| \cdot |\varphi'(u)| du = \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\| dt = L(\alpha).$$

Cuando tenemos una curva de p a q y una de q a r , casi nunca se obtiene una curva de p y r al pegarlas; por esta razón, para medir distancias en M será conveniente relajar un poco las condiciones sobre el tipo de curvas que usaremos. Una **curva diferenciable por pedazos** es una función $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ para la cual existe una partición $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$ del intervalo $[a, b]$ tal que $\gamma \upharpoonright_{[a_i, a_{i+1}]}$ es un segmento de curva para $0 \leq i \leq k-1$. Definimos la

longitud de γ como la suma de los segmentos de curva que la componen

$$L(\gamma) = \sum_{i=0}^{k-1} L(\gamma \upharpoonright_{[a_i, a_{i+1}]}) .$$

Si \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 son dos particiones del intervalo $[a, b]$, entonces $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ es una partición que refina a ambas, y como las longitudes de los segmentos de curva que $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ determina no dependen de la parametrización, se sigue que la longitud de una curva diferenciable por pedazos es independiente de la partición del intervalo y de la parametrización elegidas.

Si M es conexa, definimos para cualesquiera dos puntos $p, q \in M$ la **distancia riemanniana** $d(p, q)$ como el ínfimo de las longitudes de las curvas diferenciables por pedazos que van de p a q . Para ver que $d(p, q)$ es finito, hay que probar que podemos conectar a p y q con una curva diferenciable por pedazos. Observemos que como M es una variedad conexa, entonces es conexa por trayectorias, por lo que existe una curva continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$. Como $\alpha[[0, 1]]$ es compacto, lo podemos cubrir con una cantidad finita de bolas coordenadas regulares, y luego modificar por pedazos a α para reemplazarla con una curva diferenciable por pedazos.

Teorema 1.20. *Si M es una variedad riemanniana conexa, la función de distancia riemanniana d es una métrica en M que genera la topología de variedad en M .*

El lector interesado puede ver la demostración de este resultado en [LRM, pág. 94, Lema 6.2].

1.3.2. El plano euclideo \mathbb{E}^2

El plano euclideo, que denotaremos \mathbb{E}^2 , es \mathbb{R}^2 con su estructura diferenciable estándar, equipado con la métrica riemanniana canónica

$$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Nos limitaremos a enunciar algunas propiedades sencillas de \mathbb{E}^2 :

- El grupo de isometrías de \mathbb{E}^2 consta de transformaciones lineales ortogonales, seguidas de translaciones.
- La distancia riemanniana en \mathbb{E}^2 coincide con la métrica inducida por el producto interior canónico de \mathbb{R}^2 .

Para un triángulo T con vértices A, B y C , denotaremos α, β y γ a los ángulos interiores de T correspondientes a A, B y C , respectivamente, y denotaremos a, b y c a las distancias de los lados opuestos a A, B y C , respectivamente. En el capítulo 2 usaremos en repetidas ocasiones las leyes trigonométricas clásicas, así que por completitud, las enunciaremos en la siguiente proposición.

Proposición 1.21. *Para cualquier triángulo euclideo T se cumple lo siguiente:*

- (Ley de los cosenos)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

- (Ley de los senos)

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}.$$

El plano euclideo \mathbb{E}^2 tiene curvatura gaussiana constante 0. Como no definiremos curvatura gaussiana en este trabajo, podemos considerar lo anterior como una definición. Sea $(S, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ una superficie riemanniana; diremos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es una **métrica plana** si para cada punto p de S existe una vecindad abierta U de p isométrica a un abierto de \mathbb{E}^2 .

1.3.3. El plano hiperbólico \mathbb{H}^2

Existen tres modelos importantes del plano hiperbólico: el disco de Poincaré, el semiplano superior y el modelo del hiperboloide. Esto quiere decir que éstas son tres variedades riemannianas de dimensión 2 isométricas. Presentaremos aquí al disco de Poincaré, que es el modelo del plano hiperbólico con el cual trabajaremos en esta tesis, y daremos algunas de sus propiedades básicas.

El disco de Poincaré es el disco unitario

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\}$$

con la métrica riemanniana dada en coordenadas canónicas por

$$(x, y) \mapsto \frac{4}{(1 - x^2 - y^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como sólo usaremos este modelo del plano hiperbólico, no habrá ambigüedad si lo denotamos simplemente \mathbb{H}^2 . Una **recta hiperbólica** es un diámetro de \mathbb{D} , o bien, un arco de circunferencia ortogonal a \mathbb{S}^1 . Es fácil ver que dados cualesquiera dos puntos p y q en \mathbb{H}^2 , existe una única recta hiperbólica que los une. Veremos más adelante que el segmento de recta hiperbólica con extremos p y q es la única curva que realiza la distancia riemanniana $d(p, q)$, razón por la cual estas curvas tienen todo el derecho a llamarse rectas. Resultará extremadamente conveniente pensar al disco de Poincaré como un subconjunto de \mathbb{C} , ya que muchas isometrías de \mathbb{H}^2 son transformaciones de Möbius que mandan \mathbb{S}^1 en sí mismo y que son continuas en \mathbb{D} , es decir, que su denominador no se anula en ningún complejo con norma menor o igual que 1. Para cada $z \in \mathbb{H}^2$, pensaremos a $T_z \mathbb{H}^2$ como una copia \mathbb{C}_z de \mathbb{C} haciendo la identificación

$$a \frac{\partial_z}{\partial x} + b \frac{\partial_z}{\partial y} \mapsto a + ib.$$

En notación compleja, podemos expresar el producto interior correspondiente a \mathbb{C}_z como

$$\langle w_1, w_2 \rangle_z = \frac{4\operatorname{Re}(w_1 \overline{w_2})}{(1 - |z|^2)}.$$

Si $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ es una función holomorfa y z es un punto en \mathbb{H}^2 , la diferencial $f_*^z : \mathbb{C}_z \rightarrow \mathbb{C}_{f(z)}$ está dada por la multiplicación

$$f_*^z w = f'(z)w.$$

Presentaremos ahora algunos ejemplos de isometrías de \mathbb{H}^2 .

Ejemplo 1.22. Para cada $\theta \in \mathbb{R}$, sea $r_\theta(z) = e^{i\theta}z$, la rotación con respecto al origen con ángulo θ . Para cualesquiera $z \in \mathbb{H}^2$ y w_1, w_2 vectores en \mathbb{C}_z , se tiene que

$$\langle (r_\theta)_*^z w_1, (r_\theta)_*^z w_1 \rangle_{r_\theta(z)} = \frac{4\operatorname{Re}(e^{i\theta}w_1 \overline{e^{i\theta}w_2})}{(1 - |r_\theta(z)|^2)^2} = \frac{4\operatorname{Re}(w_1 \overline{w_2})}{(1 - |z|^2)^2} = \langle w_1, w_2 \rangle_z,$$

por lo que r_θ es isometría de \mathbb{H}^2 . \diamond

Ejemplo 1.23. Presentaremos ahora a las **translaciones hiperbólicas al origen**: para cada $a \in \mathbb{H}^2$, sea

$$\tau_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

Si $|z| = 1$ se tiene que

$$|\tau_a(z)| = \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| = \left| \frac{z - a}{z\bar{z} - \bar{a}z} \right| = \left| \frac{z - a}{\bar{z} - \bar{a}} \right| = 1,$$

por lo tanto τ_a manda \mathbb{S}^1 en sí misma, y como su denominador no se anula en \mathbb{D} , también manda \mathbb{H}^2 en sí mismo. La translación hiperbólica τ_a mapea a la recta hiperbólica que pasa por a y el origen en sí misma, ya que fija a sus extremos $\frac{a}{|a|}$ y $-\frac{a}{|a|}$, y a los demás puntos de esta recta los empuja en una misma dirección. Para convencernos de que es isometría de \mathbb{H}^2 , tomemos $z \in \mathbb{H}^2$ y $w_1, w_2 \in \mathbb{C}_z$. Tenemos que

$$\langle (\tau_a)_*^z w_1, (\tau_a)_*^z w_2 \rangle_{\tau_a(z)} = \frac{4\operatorname{Re}(\tau_a'(z)w_1 \overline{\tau_a'(z)w_2})}{(1 - |\tau_a(z)|^2)^2} = \frac{4|\tau_a'(z)|^2 \operatorname{Re}(w_1 \overline{w_2})}{(1 - |\tau_a(z)|^2)^2},$$

así que para probar que la expresión anterior es igual a $\langle w_1, w_2 \rangle_z$ bastará con demostrar que

$$|1 - \bar{a}z|^2 - |z - a|^2 = (1 - |a|^2)(1 - |z|^2).$$

Desarrollando la expresión de la derecha obtenemos

$$\begin{aligned} |1 - \bar{a}z|^2 - |z - a|^2 &= 1 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}z) + |\bar{a}z|^2 - (|z|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}z)) - |a|^2 \\ &= 1 + |\bar{a}z|^2 - |z|^2 - |a|^2 = (1 - |a|^2)(1 - |z|^2), \end{aligned}$$

de donde se concluye lo que queríamos. \diamond

A partir de las rotaciones con respecto al origen y las translaciones al origen podemos definir rotaciones con respecto a cualquier punto y translaciones entre dos puntos: si a es un punto de \mathbb{H}^2 , definimos la rotación con respecto a a con ángulo θ como $r_\theta^a = \tau_a^{-1} \circ r_\theta \circ \tau_a$; si b es otro punto de \mathbb{H}^2 , definimos la translación hiperbólica de a a b como $\tau_{a \rightarrow b} = \tau_b^{-1} \circ \tau_{\tau_b(a)} \circ \tau_b$.

Recordemos que las transformaciones de Möbius complejas mandan circunferencias en circunferencias (considerando a las rectas como circunferencias de radio infinito), y preservan ángulos entre curvas. Como r_θ y τ_a son transformaciones de Möbius que preservan a \mathbb{S}^1 , se sigue que rectas hiperbólicas se mapean en rectas hiperbólicas. Sean w y z puntos cualesquiera en \mathbb{H}^2 ; podemos aplicar τ_w seguida de una rotación adecuada para llevar a w al origen y a z a un real positivo $\lambda < 1$. Si demostramos que el segmento hiperbólico que une a 0 con λ es la única curva diferenciable por pedazos que realiza la distancia riemanniana $d(0, \lambda)$, lo mismo será cierto para w y z .

Proposición 1.24. *Sea λ un real positivo menor que 1. Entonces $d(0, \lambda) = \log\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)$, y la única curva diferenciable por pedazos con extremos 0 y λ que realiza esta distancia es el segmento hiperbólico que los une.*

Demostración. Sea $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$ una curva con $\gamma(a) = 0$ y $\gamma(b) = \lambda$. Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_a^b \frac{2((\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - (\gamma_1(t))^2 - (\gamma_2(t))^2} dt \geq \int_a^b \frac{2|\gamma_1'(t)|}{1 - (\gamma_1(t))^2} dt \\ &\geq \left| \int_a^b \frac{2\gamma_1'(t)}{1 - (\gamma_1(t))^2} dt \right| \geq \left| \int_a^b \gamma_1'(t) \left(\frac{1}{1 + \gamma_1(t)} + \frac{1}{1 - \gamma_1(t)} \right) dt \right| \\ &= [\log(1 + \gamma_1(t)) - \log(1 - \gamma_1(t))] \Big|_a^b = \log\left(\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}\right). \end{aligned}$$

La igualdad se da si y sólo si para todo $t \in [a, b]$ se cumple que $\gamma_2(t) = 0$ y $\gamma_1'(t) \geq 0$, es decir, si γ es una parametrización del segmento recto de 0 a λ que sólo va hacia la derecha. El caso en que γ es diferenciable por pedazos se sigue fácilmente al aplicar lo que ya sabemos a los tramos diferenciables de γ . ■

En analogía con el caso euclideano, definimos un **triángulo hiperbólico** como la región de \mathbb{H}^2 delimitada por los segmento hiperbólicos que determinan tres puntos que no están sobre la misma recta hiperbólica. Sea T un triángulo hiperbólico con vértices a, b, c ; denotaremos α, β y γ a los ángulos correspondientes a a, b y c , respectivamente, y denotaremos ℓ_a, ℓ_b y ℓ_c a las longitudes de los lados opuestos a a, b y c , respectivamente. Definimos el **área de un triángulo hiperbólico** T como

$$\text{Área}(T) = \int_T \frac{4}{(1 - x^2 - y^2)^2} dx dy.$$

Resumiremos las propiedades más importantes de los triángulos hiperbólicos en la siguiente proposición. Referimos al lector interesado en consultar las pruebas a [W, pág. 103, Teo. 5.21; pág 111, Prop. 5.27 y 5.28].

Proposición 1.25. *Para cualquier triángulo hiperbólico T se cumple lo siguiente:*

- *(Gauss-Bonnet)*

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi - \text{Área}(T).$$

- *(Ley de cosenos hiperbólicos)*

$$\cosh \ell_a = \cosh \ell_b \cosh \ell_c - \sinh \ell_b \sinh \ell_c \cos \alpha.$$

- *(Ley de los senos hiperbólicos)*

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\sinh \ell_a} = \frac{\text{sen } \beta}{\sinh \ell_b} = \frac{\text{sen } \gamma}{\sinh \ell_c}.$$

Para finalizar esta breve introducción al plano hiperbólico, mencionaremos que \mathbb{H}^2 tiene curvatura gaussiana constante -1. Si $(S, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ una superficie riemanniana, diremos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es una **métrica hiperbólica** si para cada punto p de S existe una vecindad abierta U de p isométrica a un abierto de \mathbb{H}^2 .

Capítulo 2

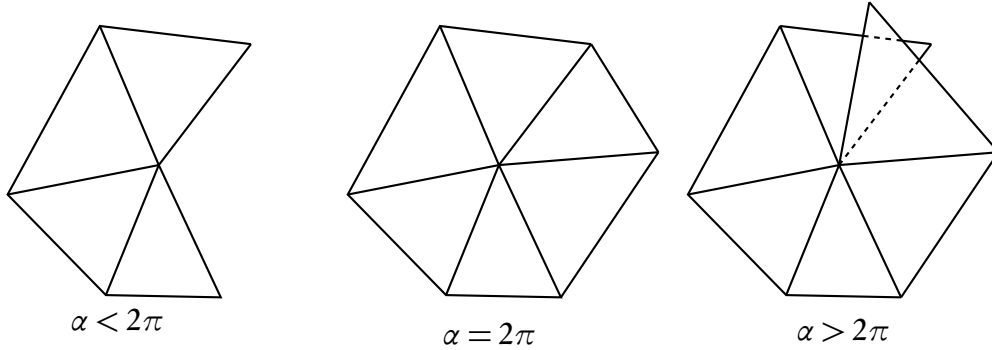
Flujo de Ricci Combinatorio

En este capítulo, comenzamos dando la construcción de una métrica riemanniana de curvatura constante en una superficie por medio de empaquetamientos de circunferencias. Como veremos, este proceso por lo general produce singularidades en la superficie; para deshacernos de éstas, introduciremos un campo vectorial llamado el flujo de Ricci combinatorio. La mayor parte del capítulo se dedica a estudiar los aspectos cualitativos del flujo de Ricci combinatorio: ecuación de evolución de la “curvatura”, existencia de soluciones para todo tiempo positivo, un teorema de compacidad que garantiza la convergencia de las soluciones y, para finalizar, unicidad de empaquetamientos de circunferencias.

2.1. La idea intuitiva

Como punto de partida, consideremos una superficie cerrada S . Supongamos que queremos encontrar una métrica riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en S de tal manera que $(S, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ tenga curvatura constante κ . El Teorema de Uniformización nos asegura que tal métrica existe, más aún, que podemos encontrar una en cada clase conforme de métricas de S , aunque la constante κ no es arbitraria; podemos usar el teorema de Gauss-Bonnet para determinar su signo. Aquí vamos a intentar un acercamiento a este problema un tanto más intuitivo: consideremos una triangulación $\Phi: \|\mathcal{K}\| \rightarrow S$ de S . Cada cara de la triangulación es homeomorfa a cualquier triángulo en el plano euclideo \mathbb{E}^2 , y \mathbb{E}^2 con la métrica usual tiene curvatura constante 0, entonces, tal vez sea posible elegir algunos triángulos, subir su métrica riemanniana a S , y de alguna manera asegurar que pegan bien para así tener en S una métrica riemanniana plana. ¿Qué tendríamos que cuidar al elegir los triángulos para asegurar que podemos lograr esto? Primero que nada, cada arista de la triangulación es parte de exactamente dos triángulos, así que los respectivos triángulos euclideos que les asignemos deberían tener lados de igual longitud en la arista correspondiente. Supongamos que ya se tienen elegidos los triángulos euclideos que cumplan esto. Se puede ver que de esta manera podemos encontrar una métrica riemanniana plana en $S \setminus V$, en donde V es el conjunto de vértices de la triangulación. Nos gustaría extender esta

métrica a todo S ; analicemos qué pasa en un vértice v . Imaginemos que tenemos todos los triángulos que tienen a v como vértice hechos de papel e intentemos pegarlos de acuerdo a la triangulación. Los ponemos sobre una superficie plana, pegando uno tras otro. Justo antes de pegar el último triángulo con el primero, tenemos tres posibilidades, ilustradas en la siguiente figura.



Llamemos α a la suma de todos los ángulos interiores con vértice en v , de estos triángulos. Estas tres posibilidades corresponden a $\alpha < 2\pi$, $\alpha = 2\pi$ y $\alpha > 2\pi$, respectivamente. Al hacer el último pegado, en el primer y tercer caso obtenemos conos, con la diferencia de que, como en el tercero dimos más de una vuelta, nos quedará un cono “arrugado”. Por otra parte, en el segundo caso obtenemos un pedazo plano de papel, así que podemos copiar la métrica de \mathbb{E}^2 también en v . Esto es lo que nos quisiéramos que pasara en todos los vértices. Con esta motivación, podemos considerar para cada vértice $v_i \in V$ el número

$$K_i = 2\pi - \alpha_i.$$

Nos gustaría elegir los triángulos de tal suerte que $K_i = 0$ para todos los vértices. Como ya dijimos antes, el teorema de Gauss-Bonnet nos dice que el poder o no lograr esto está restringido por la topología de S , pero, para dejar esto de lado por un momento, podemos plantearnos el problema, un poco más general, de elegir los triángulos de tal manera que K_i sea constante.

La idea para proceder es elegir los triángulos, primero de manera arbitraria, y después irlos modificando para que las curvaturas en los vértices se vayan haciendo cada vez más parecidas. Para lograr esto, necesitamos tener una manera fácil de elegir los triángulos en \mathbb{E}^2 . Podemos asignar a cada vértice v_i un número positivo r_i , y declarar que la arista que conecta v_i con v_j mida $r_i + r_j$ (lo cual podemos hacer porque se cumple la desigualdad del triángulo). ¿Cómo modificamos los números r_i para lograr que K_i sea constante? Es ahí donde entra la gran idea: considerar una ecuación diferencial conveniente en los r_i que haga el trabajo por nosotros, tal y como hizo Richard Hamilton con el flujo de Ricci

Cabe observar que este proceso que se hizo con triángulos euclidianos se puede imitar también con triángulos hiperbólicos y triángulos esféricos, encontrando así métricas con curvatura constante -1 y 1 , respectivamente, en $S \setminus V$. En este trabajo desarrollaremos con todo detalle los casos euclideo e hiperbólico. Después de formalizar todos los conceptos que hemos visto hasta ahora, introduciremos el flujo de Ricci combinatorio, que es el sistema de ecuaciones diferenciales que nos ayudará a elegir correctamente los triángulos hiperbólicos, o euclidianos, según sea el caso, para construir a S .

2.2. Las definiciones formales

Consideremos una superficie cerrada S , y una triangulación $\Phi : \|\mathcal{K}\| \rightarrow S$. Para no complicar la notación, vamos a identificar a \mathcal{K} y a S mediante Φ . Estableceremos ahora la notación que usaremos de aquí en adelante para los elementos de la triangulación. Al conjunto de vértices lo denotaremos $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$, A al conjunto de aristas y T al conjunto de triángulos (es decir, caras de dimensión 0, 1 y 2, respectivamente). Dados tres vértices distintos v_i, v_j, v_k , si v_i y v_j forman una arista, la denotaremos a_{ij} , y si los tres forman un triángulo, lo denotaremos Δ_{ijk} . Para cada índice $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, $\Gamma(i)$ será el conjunto de índices j tales que v_i es adyacente a v_j , es decir

$$\Gamma(i) := \{j \mid a_{ij} \in A\}.$$

Sea $P : A \rightarrow [0, \frac{\pi}{2})$ una función. A la pareja (\mathcal{K}, P) le llamaremos una triangulación de S con pesos. Elijamos una geometría base $\mathbb{G}^2 \in \{\mathbb{E}^2, \mathbb{H}^2\}$ y asignemos a cada vértice v_i un radio positivo r_i . Al vector (r_1, r_2, \dots, r_N) se le conoce como una métrica de empacamiento de círculos de S basada en (\mathcal{K}, P) con geometría base \mathbb{G}^2 (o simplemente métrica de empacamiento). Enseguida explicaremos el por qué de este misterioso nombre.

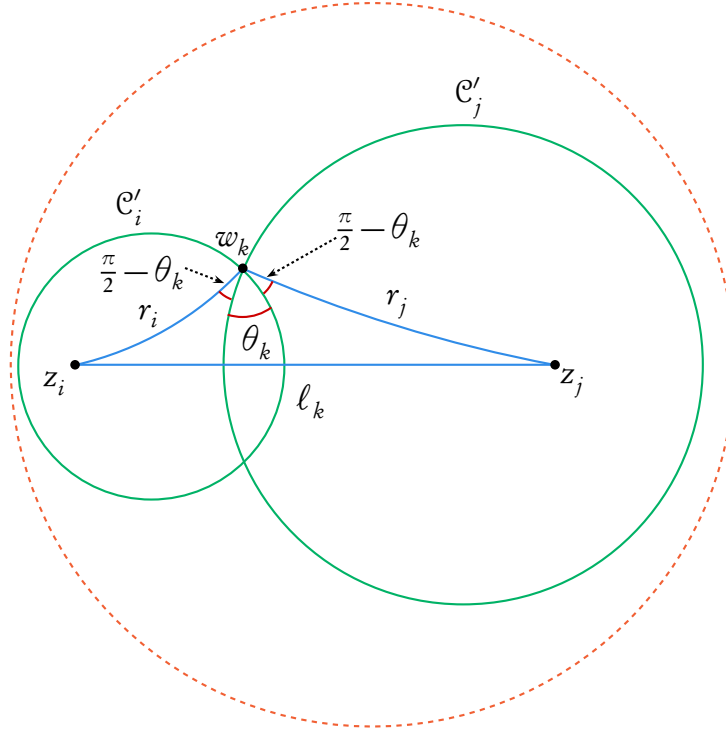
Lema 2.1. *Dados tres números reales positivos r_1, r_2, r_3 y tres ángulos $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in [0, \frac{\pi}{2})$, existe tanto en \mathbb{E}^2 como en \mathbb{H}^2 una configuración de tres círculos $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ y \mathcal{C}_3 , con radios r_1, r_2 y r_3 , respectivamente, tales que si $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, entonces \mathcal{C}_i y \mathcal{C}_j se cortan con ángulo θ_k . Además, dicha configuración es única salvo isometría.*

Demostración. Consideremos dos circunferencias \mathcal{C}'_i y \mathcal{C}'_j con centros z_i y z_j , con radios r_i y r_j , respectivamente, que se intersequen con ángulo θ_k . Sea w_k uno de los puntos de intersección de las circunferencias y ℓ_k la distancia de z_i a z_j . Como los radios de z_i y z_j a w_k son perpendiculares a su respectiva circunferencia, entonces $\angle z_i w_k z_j = \pi - \theta_k$. En \mathbb{E}^2 , la ley de cosenos nos asegura que

$$\ell_k = \sqrt{r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos(\pi - \theta_k)} = \sqrt{r_i^2 + r_j^2 + 2r_i r_j \cos \theta_k}, \quad (2.1)$$

y en \mathbb{H}^2 , la ley de cosenos hiperbólicos garantiza que

$$\begin{aligned} \cosh \ell_k &= \cosh r_i \cosh r_j - \sinh r_i \sinh r_j \cos(\pi - \theta_k) \\ &= \cosh r_i \cosh r_j + \sinh r_i \sinh r_j \cos \theta_k. \end{aligned} \quad (2.2)$$



De esto se sigue que ℓ_k es independiente de la posición de \mathcal{C}'_i y \mathcal{C}'_j , por lo que para probar el lema sólo necesitamos verificar que ℓ_1, ℓ_2 y ℓ_3 satisfacen la desigualdad del triángulo. Como $\theta_k \in [0, \frac{\pi}{2})$, entonces $\frac{\pi}{2} < \pi - \theta_k$; por lo tanto, en el triángulo con vértices z_i, z_j y w_k , el ángulo interior en w_k es mayor que los otros dos, porque en ambas geometrías la suma de los ángulos interiores de un triángulo no excede π . Sabemos además que el lado mayor de un triángulo se opone al ángulo mayor, así que $r_i < \ell_k$ y $r_j < \ell_k$. Por otra parte, $\ell_k < r_i + r_j$ por la desigualdad del triángulo. Podemos concluir entonces que

$$\ell_1 < r_2 + r_3 < \ell_3 + \ell_2,$$

y de manera similar $\ell_2 < \ell_1 + \ell_3$ y $\ell_3 < \ell_2 + \ell_1$. En cuanto a la unicidad, si se tienen dos configuraciones de circunferencias que satisfagan las condiciones, ya sabemos que los triángulos formados por sus centros tienen lados de igual longitud, y por lo tanto sus respectivos ángulos son iguales. Podemos entonces llevar uno en el otro mediante una translación, una rotación y a lo más una reflexión. ■

El lema anterior nos garantiza que podemos “realizar” a cada triángulo $\Delta_{ijk} \in T$ como un triángulo en \mathbb{G}^2 formado por los centros de tres circunferencias $\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j$ y \mathcal{C}_k tales que si $\{m, n, p\} = \{i, j, k\}$, entonces \mathcal{C}_m y \mathcal{C}_n se intersecan con ángulo $P(a_{mn})$. Formalmente podemos pensar esto de la siguiente manera: para cada triángulo $\Delta_{ijk} \in T$, consideremos en \mathbb{G}^2 un triángulo T_{ijk} cuyos vértices sean los centros $z_i^{jk}, z_j^{ki}, z_k^{ij}$ de tres circunferencias $\mathcal{C}_i^{jk}, \mathcal{C}_j^{ki}$ y \mathcal{C}_k^{ij} , con radios r_i, r_j y r_k , respectivamente, tales que \mathcal{C}_m^{np} y \mathcal{C}_n^{pm} se corten con ángulo $P(a_{nm})$. Elijamos un homeomorfismo $\psi_{ijk} : \Delta_{ijk} \rightarrow T_{ijk}$ tal que $\psi_{ijk}(v_m) = z_m^{np}$. Por ejemplo, si $\mathbb{G}^2 = \mathbb{E}^2$, podemos definir para cada $s \in \Delta_{ijk}$

$$\psi_{ijk}(s) = t_i z_i^{jk} + t_j z_j^{ki} + t_k z_k^{ij},$$

en donde t_i, t_j, t_k son las coordenadas baricéntricas de s . Construiremos ahora un atlas de $S \setminus V$. Para cada par de triángulos $\Delta_{ijk}, \Delta_{ijk'} \in T$ que compartan una arista a_{ij} , consideremos cuatro circunferencias $\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j, \mathcal{C}_k$ y $\mathcal{C}_{k'}$ en \mathbb{G}^2 , con radios $r_i, r_j, r_k, r_{k'}$, y centros w_i, w_j, w_k y $w_{k'}$, respectivamente, tales que si $m, n \in \{i, j, k, k'\}$ y $a_{mn} \in A$, entonces \mathcal{C}_m y \mathcal{C}_n se cortan con ángulo $P(a_{mn})$. Sea C el cuadrilátero (relleno) en \mathbb{G}^2 con vértices w_i, w_j, w_k y $w_{k'}$. Existen ι, ι' isometrías de \mathbb{G}^2 , únicas, tales que $\iota(z_m^{np}) = w_m$ y $\iota'(z_{m'}^{n'p'}) = w_{m'}$ si $\{m, n, p\} = \{i, j, k\}$ y $\{m', n', p'\} = \{i, j, k'\}$. Definimos la carta $\varphi : \text{Int}(\Delta_{ijk} \cup \Delta_{ijk'}) \rightarrow \text{Int}(C)$ como

$$\varphi(s) = \begin{cases} \iota \circ \psi_{ijk}(s), & \text{si } s \in \Delta_{ijk} \\ \iota' \circ \psi_{ijk'}(s), & \text{si } s \in \Delta_{ijk'}. \end{cases}$$

Si \mathcal{A} es el conjunto de todas estas cartas, entonces \mathcal{A} es un atlas de $S \setminus V$ cuyos cambios de cartas son restricciones de isometrías de \mathbb{G}^2 . Damos a $S \setminus V$ la estructura diferenciable que genera \mathcal{A} y la única métrica riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que hace isometrías a todas las cartas en \mathcal{A} . Entonces $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es una métrica plana en $S \setminus V$ si $\mathbb{G}^2 = \mathbb{E}^2$, o hiperbólica si $\mathbb{G}^2 = \mathbb{H}^2$. El siguiente paso es extender esta métrica riemanniana a todo S . De aquí en adelante, para cada $\Delta_{ijk} \in T$, denotaremos θ_i^{jk} al ángulo interior en v_i de Δ_{ijk} (podemos medir este ángulo en \mathbb{G}^2). Sea $v \in V$. Es fácil probar que podemos extender $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a S si y sólo si

$$\sum_{\Delta_{ijk} \in T} \theta_i^{jk} = 2\pi$$

Con esto como motivación, definimos la **curvatura en un vértice** v_i como

$$K_i := 2\pi - \sum_{\Delta_{ijk} \in T} \theta_i^{jk}.$$

La curvatura en un vértice nos dice qué tan alejados estamos de poder extender $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a v . Una razón para llamarla “curvatura” es que se tiene un resultado análogo al teorema clásico de Gauss-Bonnet.

Proposición 2.2. (Gauss-Bonnet) Sea $r = (r_1, r_2, \dots, r_N)$ una métrica de empacamiento de círculos de S con geometría base \mathbb{G}^2 y sea κ la curvatura de \mathbb{G}^2 , entonces tenemos que

$$\sum_{i=1}^N K_i = 2\pi\chi(S) - \kappa \text{Área}(S),$$

en donde $\chi(S)$ es la característica de Euler de S .

Demostración. Recordemos que si Δ es un triángulo en \mathbb{G}^2 con ángulos α, β y γ , entonces $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \kappa \text{Área}(\Delta)$. Se tiene entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N K_i &= \sum_{i=1}^N \left(2\pi - \sum_{\Delta_{ijk} \in T} \theta_i^{jk} \right) \\ &= 2\pi N - \sum_{\Delta_{ijk} \in T} (\theta_i^{jk} + \theta_j^{ki} + \theta_k^{ij}) \\ &= 2\pi|V| - \left(\pi|T| + \kappa \sum_{\Delta_{ijk} \in T} \text{Área}(\Delta_{ijk}) \right) \\ &= 2\pi \left(|V| - \frac{|T|}{2} \right) - \kappa \text{Área}(S) \\ &= 2\pi\chi(S) - \kappa \text{Área}(S). \end{aligned}$$

La última igualdad es cierta porque cada triángulo tiene tres aristas y cada arista está en exactamente dos triángulos, por lo que $3|T| = 2|A|$; entonces $\frac{|T|}{2} = |A| - |T|$. ■

2.3. Flujo de Ricci combinatorio

Consideremos una superficie S , una triangulación con pesos (\mathcal{K}, P) , una geometría base $\mathbb{G}^2 \in \{\mathbb{E}^2, \mathbb{H}^2\}$ y una métrica de empacamiento r_0 . Definimos el **flujo de Ricci combinatorio** con condición inicial r_0 como el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{dr_i}{dt} &= -K_i s(r_i), \\ r(0) &= r_0, \end{aligned} \tag{FR}$$

en donde

$$s(r_i) = \begin{cases} r_i, & \text{si } \mathbb{G}^2 = \mathbb{E}^2 \\ \sinh(r_i), & \text{si } \mathbb{G}^2 = \mathbb{H}^2. \end{cases} \tag{2.3}$$

Dicho de otra manera, el flujo de Ricci combinatorio es el campo vectorial R en $(0, \infty)^N$ dado por

$$R(r_1, r_2, \dots, r_N) = (-K_1(\mathbf{r})s(r_1), -K_2(\mathbf{r})s(r_2), \dots, -K_N(\mathbf{r})s(r_N))$$

Observemos que si $\mathbb{G}^2 = \mathbb{E}^2$, por la Proposición 2.2, para toda métrica de empacamiento \mathbf{r} se tiene que

$$\sum_{i=1}^N K_i(\mathbf{r}) = 2\pi\chi(S).$$

Denotamos K_{pr} a la **curvatura promedio** de S , es decir, $K_{pr} = \frac{2\pi\chi(S)}{N}$. Será conveniente en este caso ($\mathbb{G}^2 = \mathbb{E}^2$) considerar una ligera modificación de (FR), que llamaremos **flujo de Ricci combinatorio normalizado**, que está dado por

$$\frac{dr_i}{dt} = -(K_i - K_{pr})r_i. \quad (\text{FRN})$$

Observemos que si $\mathbf{r}(t)$ es una solución de (FR), entonces $e^{K_{pr}t}\mathbf{r}(t)$ es solución de (FRN), por lo que podemos obtener las soluciones de (FRN) a partir de las de (FR) y viceversa. Si $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_N) : [0, b) \rightarrow (0, \infty)$ es una solución de (FRN), tenemos

$$\frac{d}{dt}[r_1(t)r_2(t)\cdots r_N(t)] = r_1(t)r_2(t)\cdots r_N(t) \sum_{i=1}^N (-K_i(\mathbf{r}(t)) - K_{pr}) = 0, \quad (2.4)$$

por lo tanto $r_1(t)r_2(t)\cdots r_N(t)$ es constante.

Ahora presentaremos dos lemas que nos permitirán comenzar nuestro estudio del flujo de Ricci combinatorio. Sea $\Delta_{ijk} \in T$. En ambas geometrías, los radios r_i, r_j y r_k determinan las longitudes de los lados de Δ_{ijk} , como se puede apreciar en (2.1) y (2.2), los cuales a su vez determinan a los ángulos $\theta_i^{jk}, \theta_j^{ki}, \theta_k^{ij}$, entonces, podemos pensar a los ángulos como función de los radios.

Lema 2.3. *Para cualquier triángulo Δ_{ijk} , los radios y los ángulos se relacionan de la siguiente manera:*

$$(i) \quad \frac{\partial \theta_i^{jk} + \theta_j^{ki} + \theta_k^{ij}}{\partial r_i} = 0 \text{ si } \mathbb{G}^2 = \mathbb{E}^2 \quad y \quad \frac{\partial \theta_i^{jk} + \theta_j^{ki} + \theta_k^{ij}}{\partial r_i} < 0 \text{ si } \mathbb{G}^2 = \mathbb{H}^2.$$

$$(ii) \quad 0 < \frac{\partial \theta_i^{jk}}{\partial r_j}$$

$$(iii) \quad \frac{\partial \theta_i^{jk}}{\partial r_i} < 0$$

Observación 2.4. Se pueden dar argumentos geométricos sencillos para probar, por ejemplo, que fijando r_i y r_k , el ángulo θ_i^{jk} es una función estrictamente creciente de r_j , obteniendo así que $0 \leq \frac{\partial \theta_i^{jk}}{\partial r_j}$, sin embargo, más adelante necesitaremos que se dé la desigualdad estricta.

Demostración. Como estamos centrando nuestra atención en un triángulo específico Δ_{ijk} , podemos omitir los superíndices de los ángulos. Comenzaremos probando las tres afirmaciones para el caso $\mathbb{G}^2 = \mathbb{E}^2$. La afirmación (i) se sigue de inmediato porque la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo euclideo es π . Pasando a (ii), observemos que $\frac{\partial \cos \theta_i}{\partial r_j} = -\sin \theta_i \frac{\partial \theta_i}{\partial r_j}$. Como $0 < \theta_i < \pi$, entonces $-\sin \theta_i < 0$, por lo cual probar que $0 < \frac{\partial \theta_i}{\partial r_j}$ es equivalente a probar que $\frac{\partial \cos \theta_i}{\partial r_j} < 0$; probaremos esta última desigualdad. Si $\{m, n, p\} = \{i, j, k\}$, sea x_m a la longitud del lado opuesto a θ_m y definimos

$$c_m := -\cos(\pi - P(a_{np})).$$

La ley de cosenos garantiza que $x_m = \sqrt{r_n^2 + r_p^2 + 2r_n r_p c_m}$. Consideremos a los cosenos de los ángulos del triángulo como función de x_i, x_j y x_k . Por la regla de la cadena se tiene

$$\frac{\partial \cos \theta_i}{\partial r_j} = \frac{\partial \cos \theta_i}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial r_j} + \frac{\partial \cos \theta_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial r_j}. \quad (2.5)$$

Vamos a calcular estas últimas cuatro derivadas por separado. Por la ley de cosenos tenemos

$$\cos \theta_i = \frac{-x_i^2 + x_j^2 + x_k^2}{2x_j x_k}. \quad (2.6)$$

Si derivamos con respecto a x_i llegamos a

$$\frac{\partial \cos \theta_i}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{x_j x_k}. \quad (2.7)$$

Si ahora derivamos (2.6) con respecto a x_k obtenemos

$$\frac{\partial \cos \theta_i}{\partial x_k} = \frac{x_i^2 - x_j^2 + x_k^2}{2x_j x_k^2}. \quad (2.8)$$

Por otra parte, como $x_i^2 = r_j^2 + r_k^2 + 2r_j r_k c_i$, derivando con respecto a r_j obtenemos

$$2x_i \frac{\partial x_i}{\partial r_j} = 2r_j + 2r_k c_i,$$

por lo que

$$\frac{\partial x_i}{\partial r_j} = \frac{r_j + r_k c_i}{x_i}. \quad (2.9)$$

De manera similar

$$\frac{\partial x_k}{\partial r_j} = \frac{r_j + r_i c_k}{x_k}. \quad (2.10)$$

Si ahora sustituimos (2.7), (2.8), (2.9) y (2.10) en (2.5) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \cos \theta_i}{\partial r_j} &= -\frac{x_i}{x_j x_k} \cdot \frac{r_j + r_k c_i}{x_i} + \frac{x_i^2 - x_j^2 + x_k^2}{2x_j x_k^2} \cdot \frac{r_j + r_i c_k}{x_k} \\ &= -\frac{1}{x_j x_k^3} \left[x_k^2 (r_j + r_k c_i) - \frac{1}{2} (x_i^2 - x_j^2 + x_k^2) (r_j + r_i c_k) \right]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Sólo nos resta probar que la expresión entre corchetes es positiva. Llamémosla $f(r_i, r_j, r_k)$. Usando la ley de cosenos podemos poner a x_i^2, x_j^2 y x_k^2 en términos de los radios

$$\begin{aligned} f(r_i, r_j, r_k) &= x_k^2 (r_j + r_k c_i) - \frac{1}{2} (x_i^2 - x_j^2 + x_k^2) (r_j + r_i c_k) \\ &= (r_i^2 + r_j^2 + 2r_i r_j c_k) (r_j + r_k c_i) - \frac{1}{2} (r_j^2 + r_k^2 + 2r_j r_k c_i - (r_i^2 + r_k^2 + 2r_i r_k c_j) + r_i^2 + r_j^2 \\ &\quad + 2r_i r_j c_k) (r_j + r_i c_k) \\ &= (r_i^2 + r_j^2 + 2r_i r_j c_k) (r_j + r_k c_i) - (r_j^2 + r_i r_j c_k + r_j r_k c_i - r_i r_k c_j) (r_j + r_i c_k) \end{aligned}$$

Para hacer un poco más sencillo el cálculo, notemos que para todo número real $\lambda > 0$ se cumple

$$f(\lambda r_i, \lambda r_j, \lambda r_k) = \lambda^3 f(r_i, r_j, r_k).$$

Poniendo $\lambda = \frac{1}{r_j}$ vemos que para probar que f es positiva para cualesquiera radios, basta con probar que $0 < f(r_i, 1, r_k)$ para $r_i, r_k > 0$.

$$\begin{aligned} f(r_i, 1, r_k) &= (1 + r_i^2 + 2r_i c_k) (1 + r_k c_i) - (1 + r_i c_k + r_k c_i - r_i r_k c_j) (1 + r_i c_k) \\ &= 1 + r_i^2 + 2r_i c_k + r_k c_i + r_i^2 r_k c_i + 2r_i r_k c_i c_k + r_i r_k c_j (1 + r_i c_k) \\ &\quad - [1 + r_i c_k + r_k c_i + r_i r_k c_i c_k + r_i c_k + r_i^2 c_k^2] \end{aligned}$$

$$= r_i^2(1 - c_k^2) + r_i^2 r_k c_i + r_i r_k c_i c_k + r_i r_k c_j (1 + r_i c_k) \quad (2.12)$$

Como los radios son positivos y $0 < c_i, c_j, c_k \leq 1$, entonces $0 < f(r_i, 1, r_k)$.

Para probar (iii) sólo hay que usar (i) y (ii) como sigue

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial r_i} = - \left(\frac{\partial \theta_j}{\partial r_i} + \frac{\partial \theta_k}{\partial r_i} \right) < 0$$

Vamos ahora con las pruebas para $\mathbb{G}^2 = \mathbb{H}^2$. La longitud del lado opuesto a θ_m será denotada ℓ_m y

$$\begin{aligned} x_m &:= \cosh \ell_m, & y_m &:= \sinh \ell_m, \\ c_m &:= \cosh r_m, & s_m &:= \sinh r_m, \\ d_m &:= -\cos(\pi - P(a_{np})), \end{aligned}$$

en donde $\{m, n, p\} = \{i, j, k\}$. Notemos que todas estas cantidades son no negativas. Vamos a empezar probando (ii). Por la regla de la cadena se tiene

$$\frac{\partial \cos \theta_i}{\partial r_j} = \frac{\partial \cos \theta_i}{\partial \ell_i} \cdot \frac{\partial \ell_i}{\partial r_j} + \frac{\partial \cos \theta_i}{\partial \ell_k} \cdot \frac{\partial \ell_k}{\partial r_j} \quad (2.13)$$

Vamos a calcular las cuatro derivadas parciales de la derecha con ayuda de la ley de cosenos hiperbólicos. Para empezar tenemos

$$x_i = x_j x_k - y_j y_k \cos \theta_i. \quad (2.14)$$

Derivando con respecto a ℓ_i se llega a

$$y_i = -y_j y_k \frac{\partial \cos \theta_i}{\partial \ell_i},$$

por lo que

$$\frac{\partial \cos \theta_i}{\partial \ell_i} = -\frac{y_i}{y_j y_k}. \quad (2.15)$$

Reescribimos (2.14) como

$$\cos \theta_i = \frac{1}{y_j} \cdot \frac{x_j x_k - x_i}{y_k}$$

y derivamos con respecto a ℓ_k

$$\frac{\partial \cos \theta_i}{\partial \ell_k} = \frac{1}{y_j} \cdot \frac{y_k(x_j y_k) - (x_j x_k - x_i) x_k}{y_k^2} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{y_j} \cdot \frac{x_j(x_k^2 - 1) - x_j x_k^2 + x_i x_k}{y_k^2} \\ &= \frac{x_i x_k - x_j}{y_j y_k^2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Por otra parte tenemos

$$x_i = c_j c_k + s_j s_k d_i.$$

Derivando con respecto a r_j llegamos a

$$y_i \frac{\partial \ell_i}{\partial r_j} = c_k s_j + c_j s_k d_i,$$

por lo que

$$\frac{\partial \ell_i}{\partial r_j} = \frac{c_k s_j + c_j s_k d_i}{y_i}. \quad (2.18)$$

De manera similar se obtiene

$$\frac{\partial \ell_k}{\partial r_j} = \frac{c_i s_j + c_j s_i d_k}{y_k}. \quad (2.19)$$

Sustituyendo (2.15), (2.17), (2.18) y (2.19) en (2.13) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \cos \theta_i}{\partial r_j} &= -\frac{y_i}{y_j y_k} \cdot \frac{c_k s_j + c_j s_k d_i}{y_i} + \frac{x_i x_k - x_j}{y_j y_k^2} \cdot \frac{c_i s_j + c_j s_i d_k}{y_k} \\ &= -\frac{1}{y_j y_k^3} \left[y_k^2 (c_k s_j + c_j s_k d_i) + (x_j - x_i x_k) (c_i s_j + c_j s_i d_k) \right]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Sólo necesitamos probar que el término entre corchetes es positivo. Para esto, vamos a poner todo en términos de los senos y cosenos hiperbólicos de los radios. Haremos el cálculo en tres partes para que sea más claro. Sean

$$\begin{aligned} B &:= y_k^2(c_k s_j + c_j s_k d_i), \\ C &:= x_i x_k (c_i s_j + c_j s_i d_k) \\ D &:= x_j (c_i s_j + c_j s_i d_k). \end{aligned}$$

La expresión entre corchetes es igual a $B - C + D$. Primero vamos a desarrollar B

$$\begin{aligned} B &= y_k^2(c_k s_j + c_j s_k d_i) = (x_k^2 - 1)(c_k s_j + c_j s_k d_i) \\ &= (c_i^2 c_j^2 + 2c_i c_j s_i s_j d_k + s_i^2 s_j^2 d_k^2 - 1)(c_k s_j + c_j s_k d_i) \\ &= c_i^2 c_j^2 c_k s_j + c_i^2 c_j^3 s_k d_i + 2c_i c_j c_k s_i s_j^2 d_k + 2c_i c_j^2 s_i s_j s_k d_i d_k \\ &\quad + c_k s_i^2 s_j^3 d_k^2 + c_j s_i^2 s_j^2 s_k d_i d_k^2 - c_k s_j - c_j s_k d_i. \end{aligned}$$

Calculamos ahora C .

$$\begin{aligned} C &= x_i x_k (c_i s_j + c_j s_i d_k) \\ &= (c_j c_k + s_j s_k d_i)(c_i c_j + s_i s_j d_k)(c_i s_j + c_j s_i d_k) \\ &= (c_i c_j^2 c_k + c_i c_j s_j s_k d_i + c_j c_k s_i s_j d_k + s_i s_j^2 s_k d_i d_k)(c_i s_j + c_j s_i d_k) \\ &= c_i^2 c_j^2 c_k s_j + c_i^2 c_j s_j^2 s_k d_i + c_i c_j c_k s_i s_j^2 d_k + c_i s_i s_j^3 s_k d_i d_k \\ &\quad + c_i c_j^3 c_k s_i d_k + c_i c_j^2 s_i s_j s_k d_i d_k + c_j^2 c_k s_i^2 s_j d_k^2 + c_j s_i^2 s_j^2 s_k d_i d_k^2. \end{aligned}$$

Y desarrollamos D :

$$\begin{aligned} D &= x_j (c_i s_j + c_j s_i d_k) \\ &= (c_i c_k + s_i s_k d_j)(c_i s_j + c_j s_i d_k) \\ &= c_i^2 c_k s_j + c_i c_j c_k s_i d_k + c_i s_i s_j s_k d_j + c_j s_i^2 s_k d_j d_k \end{aligned}$$

Si restamos C a B obtenemos

$$\begin{aligned} B - C &= c_i^2 c_j s_k d_i (c_j^2 - s_j^2) + c_i s_i s_j s_k d_i d_k (c_j^2 - s_j^2) + c_i c_j c_k s_i d_k (s_j^2 - c_j^2) \\ &\quad + c_k s_i^2 s_j d_k^2 (s_j^2 - c_j^2) - c_k s_j - c_j s_k d_i \\ &= c_i^2 c_j s_k d_i + c_i s_i s_j s_k d_i d_k - c_i c_j c_k s_i d_k - c_k s_i^2 s_j d_k^2 - c_k s_j - c_j s_k d_i \\ &= c_j s_k d_i (c_i^2 - 1) + c_i s_i s_j s_k d_i d_k - c_k s_j (s_i^2 d_k^2 + 1) - c_i c_j c_k s_i d_k \end{aligned}$$

$$= c_j s_i^2 s_k d_i + c_i s_i s_j s_k d_i d_k - c_k s_j (s_i^2 d_k^2 + 1) - c_i c_j c_k s_i d_k$$

Finalmente, sumando D obtenemos el término entre corchetes

$$\begin{aligned} B - C + D &= c_j s_i^2 s_k d_i + c_i s_i s_j s_k d_i d_k - c_k s_j (s_i^2 d_k^2 + 1) - c_i c_j c_k s_i d_k + c_i^2 c_k s_j + c_i c_j c_k s_i d_k \\ &\quad + c_i s_i s_j s_k d_j + c_j s_i^2 s_k d_j d_k \\ &= c_j s_i^2 s_k (d_j d_k + d_i) + c_i s_i s_j s_k (d_i d_k + d_j) + c_k s_j (c_i^2 - s_i^2 d_k^2 - 1) \\ &= c_j s_i^2 s_k (d_j d_k + d_i) + c_i s_i s_j s_k (d_i d_k + d_j) + c_k s_i^2 s_j (1 - d_k^2). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Aquí ya se puede ver que $B - C + D$ es positivo porque $0 < d_i, d_j, d_k \leq 1$, así que los primeros dos términos son positivos y el tercero es no negativo.

Ahora vamos a probar (iii), que es equivalente a demostrar que $\frac{\partial \cos \theta_i}{\partial r_i} > 0$. Usando la simetría en los índices, por (2.17) y (2.18) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \cos \theta_i}{\partial r_i} &= \frac{\partial \cos \theta_i}{\partial \ell_j} \cdot \frac{\partial \ell_j}{\partial r_i} + \frac{\partial \cos \theta_i}{\partial \ell_k} \cdot \frac{\partial \ell_k}{\partial r_i} \\ &= \frac{x_i x_j - x_k}{y_j^2 y_k} \cdot \frac{c_k s_i + c_i s_k d_j}{y_j} + \frac{x_i x_k - x_j}{y_j y_k^2} \cdot \frac{c_j s_i + c_i s_j d_k}{y_k} \\ &= \frac{1}{y_j^3 y_k^3} [y_k^2 (x_i x_j - x_k)(c_k s_i + c_i s_k d_j) + y_j^2 (x_i x_k - x_j)(c_j s_i + c_i s_j d_k)]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Tenemos que demostrar que el término entre corchetes en (2.22) es positivo, al cual denotaremos E . Sean $J = c_k s_i + c_i s_k d_j$ y $K = c_j s_i + c_i s_j d_k$. Entonces podemos escribir a E como

$$\begin{aligned} E &= (x_k^2 - 1)(x_i x_j - x_k)J + (x_j^3 - 1)(x_i x_k - x_j)K \\ &= x_i x_j x_k^2 J + x_i x_j^2 x_k K - x_k^3 J - x_j^3 K + x_k J + x_j K - x_i x_j J - x_i x_k K \\ &= s_j s_k d_i (x_j J (x_k^2 - 1) + x_k K (x_j^2 - 1)) + c_j c_k (x_j x_k^2 J + x_j^2 x_k K - x_j J - x_k K) \\ &\quad + x_k J + x_j K - x_k^3 J - x_j^3 K \end{aligned}$$

Notemos que el primer sumando es positivo, entonces bastará con probar que la suma del resto es positiva; la denotaremos F . Vamos a hacer el cálculo en varias partes, aprovechando las simetrías en los índices j y k .

$$\begin{aligned} x_j x_k^2 &= (c_i c_k + s_i s_k d_j)(c_i^2 c_j^2 + 2c_i c_j s_i s_j d_k + s_i^2 s_j^2 d_k^2) \\ &= c_i^3 c_j^2 c_k + 2c_i^2 c_j c_k s_i s_j d_k + c_i c_k s_i^2 s_j^2 d_k^2 + c_i^2 c_j^2 s_i s_k d_j + 2c_i c_j s_i^2 s_j s_k d_j d_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + s_i^3 s_j^2 s_k d_j d_k^2 \\
c_j c_k x_j x_k^2 J &= x_j x_k^2 (c_j c_k^2 s_i + c_i c_j c_k s_k d_j) \tag{2.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c_i^3 c_j^3 c_k^3 s_i + 2c_i^2 c_j^2 c_k^3 s_i^2 s_j d_k + c_i c_j c_k^3 s_i^3 s_j^2 d_k^2 + c_i^2 c_j^3 c_k^2 s_i^2 s_k d_j + 2c_i c_j^2 c_k^2 s_i^3 s_j s_k d_j d_k \\
&+ c_j c_k^2 s_i^4 s_j^2 s_k d_j d_k^2 + c_i^4 c_j^3 c_k^2 s_k d_j + 2c_i^3 c_j^2 c_k^2 s_i s_j s_k d_j d_k + c_i^2 c_j c_k^2 s_i^2 s_j^2 s_k d_j d_k^2 \\
&+ c_i^3 c_j^3 c_k s_i s_k^2 d_j^2 + 2c_i^2 c_j^2 c_k s_i^2 s_j s_k^2 d_j^2 d_k + c_i c_j c_k s_i^3 s_j^2 s_k^2 d_j^2 d_k^2 \tag{2.24}
\end{aligned}$$

Por otro lado se tiene

$$\begin{aligned}
x_k^3 J &= (c_i c_j + s_i s_j d_k)^3 (c_k s_i + c_i s_k d_j) \\
&= (c_i^3 c_j^3 + 3c_i^2 c_j^2 s_i s_j d_k + 3c_i c_j s_i^2 s_j^2 s_k^2 + s_i^3 s_j^3 d_k^3) (c_k s_i + c_i s_k d_j) \\
&= c_i^3 c_j^3 c_k s_i + 3c_i^2 c_j^2 c_k s_i^2 s_j d_k + 3c_i c_j c_k s_i^3 s_j^2 d_k^2 + c_k s_i^4 s_j^3 d_k^3 + c_i^4 c_j^3 s_k d_j + 3c_i^3 c_j^2 s_i s_j s_k d_j d_k \\
&+ 3c_i^2 c_j s_i^2 s_j^2 s_k d_j d_k^2 + c_i s_i^3 s_j^3 s_k d_j d_k^3. \tag{2.25}
\end{aligned}$$

De (2.24) y (2.25) se sigue

$$\begin{aligned}
c_j c_k x_j x_k^2 J - x_k^3 J &= (c_k^2 - 1)(c_i^3 c_j^3 c_k s_i + 2c_i^2 c_j^2 c_k s_i^2 s_j d_k + c_i c_j c_k s_i^3 s_j^2 d_k^2 + c_i^4 c_j^3 s_k d_j \\
&+ 2c_i^3 c_j^2 s_i s_j s_k d_j d_k + c_i^2 c_j s_i^2 s_j^2 s_k d_j d_k^2) + c_i s_i^3 s_j s_k d_j d_k (c_j^2 c_k^2 - s_j^2 d_k^2) \\
&+ c_i^2 c_j^3 c_k^2 s_i^2 s_k d_j + 2c_i c_j^2 c_k^2 s_i^3 s_j s_k d_j d_k + c_j c_k^2 s_i^4 s_j^2 s_k d_j d_k^2 + c_i^3 c_j^3 c_k s_i s_k^2 d_j^2 \\
&+ 2c_i^2 c_j^2 c_k s_i^2 s_j s_k^2 d_j^2 d_k + c_i c_j c_k s_i^3 s_j^2 s_k^2 d_j^2 d_k^2 - c_i^2 c_j^2 c_k s_i^2 s_j d_k - 2c_i c_j c_k s_i^3 s_j^2 d_k^2 \\
&- c_k s_i^4 s_j^3 d_k^3 - c_i^3 c_j^2 s_i s_j s_k d_j d_k - 2c_i^2 c_j s_i^2 s_j^2 s_k d_j d_k^2 \\
&= c_i^3 c_j^3 c_k s_i s_k^2 + 2c_i^2 c_j^2 c_k s_i^2 s_j s_k^2 d_k + c_i c_j c_k s_i^3 s_j^2 s_k^2 d_k^2 + c_i^4 c_j^3 s_k^3 d_j + 2c_i^3 c_j^2 s_i s_j s_k^3 d_j d_k \\
&+ c_i^2 c_j s_i^2 s_j^2 s_k^3 d_j d_k^2 + c_i s_i^3 s_j^3 s_k d_j d_k (1 - d_k^2) + c_i c_k^2 s_i^3 s_j s_k d_j d_k + c_i s_i^3 s_j^3 s_k^3 d_j d_k \\
&+ c_i^2 c_j^3 c_k^2 s_i^2 s_k d_j + 2c_i c_j^2 c_k^2 s_i^3 s_j s_k d_j d_k + c_j c_k^2 s_i^4 s_j^2 s_k d_j d_k^2 + c_i^3 c_j^3 c_k s_i s_k^2 d_j^2 \\
&+ 2c_i^2 c_j^2 c_k s_i^2 s_j s_k^2 d_j^2 d_k + c_i c_j c_k s_i^3 s_j^2 s_k^2 d_j^2 d_k^2 - c_i^2 c_j^2 c_k s_i^2 s_j d_k - 2c_i c_j c_k s_i^3 s_j^2 d_k^2 \\
&- c_k s_i^4 s_j^3 d_k^3 - c_i^3 c_j^2 s_i s_j s_k d_j d_k - 2c_i^2 c_j s_i^2 s_j^2 s_k d_j d_k^2
\end{aligned}$$

Intercambiando los papeles de j y k se obtiene $c_j c_k x_j^2 x_k K - x_j^3 K$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
c_j c_k x_j x_k (x_k J + x_j K) - x_k^3 J - x_j^3 K &= c_i^3 c_j c_k s_i (c_j^2 s_k^2 + c_k^2 s_j^2) + 2c_i^2 c_j c_k s_i^2 s_j s_k (c_j s_k d_k + c_k s_j d_j) \\
&+ c_i c_j c_k s_i^3 s_j^2 s_k^2 (d_k^2 + d_j^2) + c_i^4 (c_j^3 s_k^3 d_j + c_k^3 s_j^3 d_k) + 2c_i^3 s_i s_j s_k d_j d_k (c_j^2 s_k^2 + c_k^2 s_j^2) \\
&+ c_i^2 s_i^2 s_j^2 s_k^2 d_j d_k (c_j s_k d_k + c_k s_j d_j) + c_i s_i^3 s_j s_k d_j d_k (s_j^2 (1 - d_k^2) + s_k^2 (1 - d_j^2)) \\
&+ c_i s_i^3 s_j s_k d_j d_k (c_k^2 + c_j^2) + 2c_i s_i^3 s_j^3 s_k^3 d_j d_k + c_i^2 c_j^2 c_k^2 s_i^2 (c_j s_k d_j + c_k s_j d_k) \\
&+ 4c_i c_j^2 c_k^2 s_i^3 s_j s_k d_j d_k + c_j c_k s_i^4 s_j s_k d_j d_k (c_k s_j d_k + c_j s_k d_j)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_i^3 c_j c_k s_i (c_j^2 s_k^2 d_j^2 + c_k^2 s_j^2 d_k^2) + 2c_i^2 c_j c_k s_i^2 s_j s_k d_j d_k (c_j s_k d_j + c_k s_j d_k) \\
& + 2c_i c_j c_k s_i^3 s_j^2 s_k^2 d_j^2 d_k^2 - c_i^2 c_j c_k s_i^2 (c_j s_j d_k + c_k s_k d_j) - 2c_i c_j c_k s_i^3 (s_j^2 d_k^2 + s_k^2 d_j^2) \\
& - s_i^4 (c_k s_j^3 d_k^3 + c_j s_k^3 d_j^3) - c_i^3 s_i s_j s_k d_j d_k (c_j^2 + c_k^2) - 2c_i^2 s_i^2 s_j s_k d_j d_k (c_j s_j d_k + c_k s_k d_j) \\
= & c_i^2 c_j^2 c_k s_i^2 s_j d_k (c_k^2 - 1) + c_i^2 c_j c_k^2 s_i^2 s_k d_j (c_j^2 - 1) + c_i c_j c_k s_i s_j^2 d_k^2 (c_k^2 + s_i^2 s_k^2) \\
& + c_i c_j c_k s_i s_j^2 d_j^2 (c_j^2 + s_i^2 s_j^2) + c_i c_j c_k s_i s_k^2 (c_j^2 + s_i^2 s_j^2 + s_i^2 (1 - d_j^2)) + c_i c_j c_k s_i s_j^2 (c_k^2 \\
& + s_i^2 s_k^2 + s_i^2 (1 - d_k^2)) + c_j s_k^3 d_j (s_i^2 + c_i^2 + c_i^4 s_j^2 + s_i^4 (1 - d_j^2)) + c_k s_j^3 d_k (s_i^2 + c_i^2 \\
& + c_i^4 s_k^2 + s_i^4 (1 - d_k^2)) + 2c_i^2 c_k s_i^2 s_j s_k^2 d_j^2 d_k (c_j^2 - 1) + 2c_i^2 c_j s_i^2 s_j^2 s_k d_j d_k^2 (c_k^2 - 1) \\
& + 2c_i^2 c_j c_k s_i^2 s_j s_k (c_j s_k d_k + c_k s_j d_j) + c_i c_j c_k s_i^3 s_j^2 s_k^2 (d_k^2 + d_j^2) \\
& + 2c_i^3 s_i s_j s_k d_j d_k (c_j^2 s_k^2 + c_k^2 s_j^2) + c_i^2 s_i^2 s_j^2 s_k^2 d_j d_k (c_j s_k d_k + c_k s_j d_j) \\
& + c_i s_i^3 s_j s_k d_j d_k (s_j^2 (1 - d_k^2) + s_k^2 (1 - d_j^2)) + c_i s_i^3 s_j s_k d_j d_k (c_k^2 + c_j^2) + 2c_i s_i^3 s_j^3 s_k^3 d_j d_k \\
& + 4c_i c_j^2 c_k^2 s_i^3 s_j s_k d_j d_k + c_j c_k s_i^4 s_j s_k d_j d_k (c_k s_j d_k + c_j s_k d_j) + 2c_i c_i c_k s_i^3 s_j^2 s_k^2 d_j^2 d_k^2 \\
& - c_i^3 s_i s_j s_k d_j d_k (s_j^2 + s_k^2) - 2c_i s_i^3 s_j s_k d_j d_k - 2c_i s_i s_j s_k d_j d_k \\
= & c_i^2 c_j c_k s_i^2 s_j s_k (c_j s_k d_k + c_k s_j d_j) + c_i c_j c_k s_i s_j^2 d_k^2 (c_k^2 + s_i^2 s_k^2) + c_i c_j c_k s_i s_k^2 d_j^2 (c_j^2 + s_i^2 s_j^2) \\
& + c_i c_j c_k s_i s_k^2 (c_j^2 + s_i^2 s_j^2 + s_i^2 (1 - d_j^2)) + c_i c_j c_k s_i s_j^2 (c_k^2 + s_i^2 s_k^2 + s_i^2 (1 - d_k^2)) \\
& + c_j s_k^3 d_j (s_i^2 + c_i^2 + c_i^4 s_j^2 + s_i^4 (1 - d_j^2)) + c_k s_j^3 d_k (s_i^2 + c_i^2 + c_i^4 s_k^2 + s_i^4 (1 - d_k^2)) \\
& + 2c_i^2 s_i^2 s_j^2 s_k^2 d_j d_k (c_k s_j d_j + c_j s_k d_k) + c_i^3 s_i s_j s_k^3 d_j d_k (c_j^2 - 1) \\
& + c_i^3 s_i s_j^3 s_k d_j d_k (c_k^2 - 1) + c_i s_i^3 s_j s_k d_j d_k (c_k^2 + c_j^2 - 2) + 2c_i^2 c_j c_k s_i^2 s_j s_k (c_j s_k d_k \\
& + c_k s_j d_j) + c_i c_j c_k s_i^3 s_j^2 s_k^2 (d_k^2 + d_j^2) + c_i^3 s_i s_j s_k d_j d_k (c_j^2 s_k^2 + c_k^2 s_j^2) \\
& + c_i^2 s_i^2 s_j^2 s_k^2 d_j d_k (c_j s_k d_k + c_k s_j d_j) + c_i s_i^3 s_j s_k d_j d_k (s_j^2 (1 - d_k^2) + s_k^2 (1 - d_j^2)) \\
& + 2c_i s_i^3 s_j^3 s_k^3 d_j d_k + 4c_i c_j^2 c_k^2 s_i^3 s_j s_k d_j d_k + c_j c_k s_i^4 s_j s_k d_j d_k (c_k s_j d_k + c_j s_k d_j) \\
& + 2c_i c_i c_k s_i^3 s_j^2 s_k^2 d_j^2 d_k^2 - 2c_i s_i s_j s_k d_j d_k \tag{2.26}
\end{aligned}$$

Vamos a desarrollar los cuatro término faltantes.

$$\begin{aligned}
c_j c_k x_k K & = c_j c_k (c_i c_j + s_i s_j d_k) (c_j s_i + c_i s_j d_k) \\
& = c_i c_j^3 c_k s_i + c_i^2 c_j^2 c_k s_j d_k + c_j^2 c_k s_i^2 s_j d_k + c_i c_j c_k s_i s_j^2 d_k^2 \\
& = c_i c_j c_k s_i s_j^2 + c_i c_j c_k s_i + c_i^2 c_k s_j^3 d_k + c_i^2 c_k s_j d_k + c_k s_i^2 s_j^3 d_k + c_k s_i^2 s_j d_k \\
& \quad + c_i c_j c_k s_i s_j^2 d_k^2 \tag{2.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_k J & = (c_i c_k + s_i s_j d_k) (c_k s_i + c_i s_k d_j) \\
& = c_i c_j c_k s_i + c_i^2 c_j s_k d_j + c_k s_i^2 s_j d_k + c_i s_i s_j s_k d_j d_k \tag{2.28}
\end{aligned}$$

De (2.27) y (2.28) se llega a

$$\begin{aligned} x_k J - c_j c_k x_k K &= c_i^2 c_j s_k d_j + c_i s_i s_j s_k d_j d_k - c_i c_j c_k s_i s_j^2 - c_i^2 c_k s_j^3 d_k - c_i^2 c_k s_j d_k \\ &\quad - c_k s_i^2 s_j^3 d_k - c_i c_j c_k s_i s_j^2 d_k^2. \end{aligned}$$

Cambiando nuevamente los papeles de j y k tenemos

$$\begin{aligned} x_k J + x_j K - c_j c_k (x_k K + x_j J) &= c_i^2 (c_j s_k d_j + c_k s_j d_k) + 2c_i s_i s_j s_k d_j d_k - c_i c_j c_k s_i (s_j^2 + s_k^2) \\ &\quad - c_i^2 (c_k s_j^3 d_k + c_j s_k^3 d_j) - c_i^2 (c_k s_j d_k + c_j s_k d_j) - s_i^2 (c_k s_j^3 d_k + c_j s_k^3 d_j) \\ &\quad - c_i c_j c_k s_i (s_j^2 d_k^2 + s_k^2 d_j^2) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Finalmente, sumando (2.26) y (2.29) se obtiene

$$\begin{aligned} F &= c_i c_j c_k s_i s_k^2 (c_j^2 + s_i^2 s_j^2 + s_i^2 (1 - d_j^2) - 1) + c_i c_j c_k s_i s_j^2 (c_k^2 + s_i^2 s_k^2 + s_i^2 (1 - d_k^2) - 1) \\ &\quad + c_k s_j^3 d_k (c_i^4 s_k^2 + s_i^4 (1 - d_k^2)) + c_j s_k^3 d_j (c_i^4 s_j^2 + s_i^4 (1 - d_j^2)) + c_i c_j c_k s_i s_j^2 d_k^2 (c_k^2 + s_i^2 s_k^2 - 1) \\ &\quad + c_i c_j c_k s_i s_k^2 d_j^2 (c_j^2 + s_i^2 s_j^2 - 1) + c_i^2 c_j c_k s_i^2 s_j s_k (c_j s_k d_k + c_k s_j d_j) + 2c_i^2 s_i^2 s_j^2 s_k^2 d_j d_k (c_k s_j d_j \\ &\quad + c_j s_k d_k) + c_i^3 s_i s_j s_k^3 d_j d_k (c_j^2 - 1) + c_i^3 s_i s_j^3 s_k d_j d_k (c_k^2 - 1) + c_i s_i^3 s_j s_k d_j d_k (c_k^2 + c_j^2 - 2) \\ &\quad + 2c_i^2 c_j c_k s_i^2 s_j s_k (c_j s_k d_k + c_k s_j d_j) + c_i c_j c_k s_i^3 s_j^2 s_k^2 (d_k^2 + d_j^2) + c_i^3 s_i s_j s_k d_j d_k (c_j^2 s_k^2 + c_k^2 s_j^2) \\ &\quad + c_i^2 s_i^2 s_j^2 s_k^2 d_j d_k (c_j s_k d_k + c_k s_j d_j) + c_i s_i^3 s_j s_k d_j d_k (s_j^2 (1 - d_k^2) + s_k^2 (1 - d_j^2)) \\ &\quad + 2c_i s_i^3 s_j^3 s_k^3 d_j d_k + 4c_i c_j^2 c_k^2 s_i^3 s_j s_k d_j d_k + c_j c_k s_i^4 s_j s_k d_j d_k (c_k s_j d_k + c_j s_k d_j) \end{aligned}$$

Aquí ya se ve claramente que F es positivo, como se quería. Para finalizar, vamos a probar (i). Multiplicando ambos lados de (i) por $-\sin \theta_i \sin \theta_j \sin \theta_k$, lo que queremos probar es equivalente a

$$\sin \theta_j \sin \theta_k \frac{\partial \cos \theta_i}{\partial r_i} + \sin \theta_i \sin \theta_k \frac{\partial \cos \theta_j}{\partial r_i} + \sin \theta_i \sin \theta_j \frac{\partial \cos \theta_k}{\partial r_i} > 0. \quad (2.30)$$

Denotemos B al lado izquierdo de (2.30). Por (2.20) y (2.22) tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \cos \theta_i}{\partial r_i} &= \frac{1}{y_j y_k} \left[\frac{1}{y_j^2} (x_i x_j - x_k) (c_k s_i + c_i s_k d_j) + \frac{1}{y_k^2} (x_i x_k - x_j) (c_j s_i + c_i s_j d_k) \right] \\ \frac{\partial \cos \theta_j}{\partial r_i} &= -\frac{1}{y_i y_k} \left[(c_k s_i + c_i s_k d_j) - \frac{1}{y_k^2} (x_j x_k - x_i) (c_j s_i + c_i s_j d_k) \right] \\ \frac{\partial \cos \theta_k}{\partial r_i} &= -\frac{1}{y_i y_j} \left[(c_j s_i + c_i s_j d_k) - \frac{1}{y_j^2} (x_j x_k - x_i) (c_k s_i + c_i s_k d_j) \right] \end{aligned}$$

Por la ley de senos hiperbólicos se tiene que $\frac{\text{sen } \theta_i}{y_i} = \frac{\text{sen } \theta_j}{y_j} = \frac{\text{sen } \theta_k}{y_k} = \lambda$, por lo que, si denotamos $J = c_k s_i + c_i s_k d_j$ y $K = c_j s_i + c_i s_j d_k$ se tiene

$$\begin{aligned}
B &= \lambda^2 \left[\frac{J}{y_j^2} (x_i x_j - x_k + x_j x_k - x_i) + \frac{K}{y_k^2} (x_i x_k - x_j + x_j x_k - x_i) - J - K \right] \\
&= \lambda^2 \left[\frac{J}{x_j^2 - 1} (x_i + x_k)(x_j - 1) + \frac{K}{x_k^2 - 1} (x_i + x_j)(x_k - 1) - J - K \right] \\
&= \frac{\lambda^2}{(x_j + 1)(x_k + 1)} [J((x_i + x_k)(x_k + 1) - (x_j + 1)(x_k + 1)) \\
&\quad + K((x_i + x_j)(x_j + 1) - (x_j + 1)(x_k + 1))] \tag{2.31}
\end{aligned}$$

Entonces hay que demostrar que el término entre corchetes en (2.31) es positivo, al cual denotaremos C .

$$\begin{aligned}
(x_i + x_k)(x_k + 1) &= (c_j c_k + s_j s_k d_i)(c_i c_j + s_i s_j d_k) + (c_i c_j + s_i s_j d_k)^2 + (c_j c_k + s_j s_k d_i) \\
&\quad + (c_i c_j + s_i s_j d_k) \\
&= c_i c_j^2 c_k + c_j c_k s_i s_j d_k + c_i c_j s_j s_k d_i + s_i s_j^2 s_k d_i d_k + c_i^2 c_j^2 + 2c_i c_j s_i s_j d_k \\
&\quad + s_i^2 s_j^2 d_j^2 + (c_j c_k + s_j s_k d_i) + (c_i c_j + s_i s_j d_k) \tag{2.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x_j + 1)(x_k + 1) &= (c_i c_k + s_i s_k d_j)(c_i c_j + s_i s_j d_k) + (c_i c_k + s_i s_k d_j) + (c_i c_j + s_i s_j d_k) + 1 \\
&= c_i^2 c_j c_k + c_i c_k s_i s_j d_k + c_i c_j s_i s_k d_j + s_i^2 s_j s_k d_j d_k + (c_i c_k + s_i s_k d_j) \\
&\quad + (c_i c_j + s_i s_j d_k) + 1. \tag{2.33}
\end{aligned}$$

De (2.32) se sigue

$$\begin{aligned}
J(x_i + x_k)(x_k + 1) &= c_i c_j^2 c_k^2 s_i + c_j c_k^2 s_i^2 s_j d_k + c_i c_j c_k s_i s_j s_k d_i + c_k s_i^2 s_j^2 s_k d_i d_k + c_i^2 c_j^2 c_k s_i \\
&\quad + 2c_i c_j c_k s_i^2 s_j d_k + c_k s_i^3 s_j^2 d_k^2 + c_j c_k^2 s_i + c_k s_i s_j s_k d_i + c_i c_j c_k s_i \\
&\quad + c_k s_i^2 s_j d_k + c_i^2 c_j^2 c_k s_k d_j + c_i c_j c_k s_i s_j s_k d_j d_k + c_i^2 c_j s_j s_k^2 d_i d_j \\
&\quad + c_i s_i s_j^2 s_k^2 d_i d_j d_k + c_i^3 c_j^2 s_k d_j + 2c_i^2 c_j s_i s_j s_k d_j d_k + c_i s_i^2 s_j^2 s_k d_j d_k^2 \\
&\quad + c_i c_j c_k s_k d_j + c_i s_j s_k^2 d_i d_j + c_i^2 c_j s_k d_j + c_i s_i s_j s_k d_j d_k, \tag{2.34}
\end{aligned}$$

y por (2.33) se tiene

$$\begin{aligned}
K(x_j + 1)(x_k + 1) &= c_i^2 c_j^2 c_k s_i + c_i c_j c_k s_i^2 s_j d_k + c_i c_j^2 s_i^2 s_k d_j + c_j s_i^3 s_j s_k d_j d_k + c_i c_j c_k s_i \\
&\quad + c_j s_i^2 s_k d_j + c_i c_j^2 s_i + c_j s_i^2 s_j d_k + c_j s_i + c_i^3 c_j c_k s_j d_k + c_i^2 c_k s_i s_j^2 d_k^2 \\
&\quad + c_i^2 c_j s_i s_j s_k d_j d_k + c_i s_i^2 s_j^2 s_k d_j d_k^2 + c_i^2 c_k s_j d_k + c_i s_i s_j s_k d_j d_k
\end{aligned}$$

$$+ c_i^2 c_j s_j d_k + c_i s_i s_j^2 d_k^2 + c_i s_j d_k. \quad (2.35)$$

Combinando (2.34) y (2.35) tenemos

$$\begin{aligned} J(x_i + x_k)(x_k + 1) - K(x_j + 1)(x_k + 1) &= (s_i^2 - c_i^2)(c_k s_i s_j^2 d_k^2 + c_i c_j c_k s_j d_k + c_k s_j d_k) \\ &\quad + (c_i^2 - s_i^2)(c_j s_i s_j s_k d_j d_k + c_j s_k d_j + c_i c_j^2 s_k d_j) + (c_k^2 - 1)(c_i c_j^2 s_i + c_j s_i^2 s_j d_k + c_j s_i) \\ &\quad + c_i c_j c_k s_i s_j s_k (d_i + d_j d_k) + c_k s_i^2 s_j^2 s_k d_i d_k + c_k s_i s_j s_k d_i + c_i^2 c_j^2 c_k s_k d_j \\ &\quad + c_i^2 c_j s_j s_k^2 d_i d_j + c_i s_i s_j^2 s_k^2 d_i d_j d_k + c_i c_j c_k s_k d_j + c_i s_j s_k^2 d_i d_j - c_i^2 c_j s_j d_k \\ &\quad - c_i s_i s_j^2 d_k^2 - c_i s_j d_k \\ &= c_j s_i s_j s_k d_j d_k + c_j s_k d_j + c_i c_j^2 s_k d_j + s_k^2 (c_i c_j^2 s_i + c_j s_i^2 s_j d_k + c_j s_i) \\ &\quad + c_i c_j c_k s_i s_j s_k (d_i + d_j d_k) + c_k s_i^2 s_j^2 s_k d_i d_k + c_k s_i s_j s_k d_i \\ &\quad + c_i^2 c_j^2 c_k s_k d_j + c_i^2 c_j s_j s_k^2 d_i d_j + c_i s_i s_j^2 s_k^2 d_i d_j d_k + c_i c_j c_k s_k d_j + c_i s_j s_k^2 d_i d_j \\ &\quad - c_k s_i s_j^2 d_k^2 - c_i c_j c_k s_j d_k - c_k s_j d_k - c_i^2 c_j s_j d_k - c_i s_i s_j^2 d_k^2 - c_i s_j d_k \end{aligned} \quad (2.36)$$

Como $J(x_i + x_k)(x_k + 1) - K(x_j + 1)(x_k + 1)$ se obtiene cambiando los índices j y k en $K(x_i + x_j)(x_j + 1) - J(x_j + 1)(x_k + 1)$, entonces

$$\begin{aligned} K(x_i + x_j)(x_j + 1) - J(x_j + 1)(x_k + 1) &= c_k s_i s_j s_k d_j d_k + c_k s_j d_k + c_i c_k^2 s_j d_k \\ &\quad + s_j^2 (c_i c_k^2 s_i + c_k s_i^2 s_k d_j + c_k s_i) + c_i c_j c_k s_i s_j s_k (d_i + d_j d_k) + c_j s_i^2 s_j s_k^2 d_i d_j \\ &\quad + c_j s_i s_j s_k d_i + c_i^2 c_j c_k^2 s_j d_k + c_i^2 c_k s_j^2 s_k d_i d_k + c_i s_i s_j^2 s_k^2 d_i d_j d_k + c_i c_j c_k s_j d_k \\ &\quad + c_i s_j^2 s_k d_i d_k - c_j s_i s_k^2 d_j^2 - c_i c_j c_k s_k d_j - c_j s_k d_j - c_i^2 c_k s_k d_j - c_i s_i s_k^2 d_j^2 - c_i s_k d_j \end{aligned} \quad (2.37)$$

Finalmente, sumando (2.36) y (2.37) obtenemos

$$\begin{aligned} C &= c_k s_i s_j^2 (1 - d_k^2) + c_j s_i s_k^2 (1 - d_j^2) + c_i^2 c_j s_j d_k (c_k^2 - 1) + c_i^2 c_k s_k d_j (c_j^2 - 1) + c_i s_i s_j^2 (c_k^2 - d_k^2) \\ &\quad + c_i s_i s_k^2 (c_j^2 - d_j^2) + c_i s_j d_k (c_k^2 - 1) + c_i s_k d_j (c_j^2 - 1) + s_i s_j s_k d_j d_k (c_j + c_k) + s_i^2 s_j s_k (c_j s_k d_k + c_k s_j d_j) \\ &\quad + 2c_i c_j c_k s_i s_j s_k (d_i + d_j d_k) + s_i^2 s_j s_k d_i (c_j s_k d_j + c_k s_j d_k) + s_i s_j s_k d_i (c_j + c_k) \\ &\quad + c_i^2 s_j s_k d_i (c_j s_k d_j + c_k s_j d_k) + 2c_i s_i s_j^2 s_k^2 d_i d_j d_k + c_i s_j s_k d_i (s_j d_k + s_k d_j), \end{aligned}$$

por lo tanto C es positivo, como queríamos probar. ■

Observación 2.5. Si $\mathbb{G}^2 = \mathbb{E}^2$, en (2.12) se puede ver que $\frac{\partial \cos \theta_i}{\partial r_j} = 0$ si $c_i = c_j = 0$ y $c_k = 1$; si $\mathbb{G}^2 = \mathbb{H}^2$, de (2.21) se sigue que $\frac{\partial \cos \theta_i}{\partial r_j} = 0$ si $d_i = d_j = 0$ y $d_k = 1$. Por esta razón que pedimos que la función P asigne a cada arista un peso en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2})$.

Lema 2.6. Sea $s(r)$ la función definida en (2.3). Para cualquier triángulo Δ_{ijk} se cumple la simetría

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial r_j} s(r_j) = \frac{\partial \theta_j}{\partial r_i} s(r_i). \quad (2.38)$$

Demostración. Vamos a usar la notación de la prueba del Lema 2.3. Comenzaremos con el caso $\mathbb{G}^2 = \mathbb{E}^2$. La igualdad (2.38) es equivalente a

$$-\text{sen } \theta_i \text{sen } \theta_j \frac{\partial \theta_i}{\partial r_j} r_j = -\text{sen } \theta_i \text{sen } \theta_j \frac{\partial \theta_j}{\partial r_i} r_i,$$

la cual a su vez es equivalente a

$$\text{sen } \theta_j \frac{\partial \cos \theta_i}{\partial r_j} r_j = \text{sen } \theta_i \frac{\partial \cos \theta_j}{\partial r_i} r_i. \quad (2.39)$$

Por (2.11) tenemos:

$$\text{sen } \theta_j \frac{\partial \cos \theta_i}{\partial r_j} r_j = \frac{\text{sen } \theta_j}{x_j x_k^3} \left[x_k^2 (r_j + r_k c_i) - \frac{1}{2} (x_i^2 - x_j^2 + x_k^2) (r_j + r_i c_k) \right], \quad (2.40)$$

$$\text{sen } \theta_i \frac{\partial \cos \theta_j}{\partial r_i} r_i = \frac{\text{sen } \theta_i}{x_i x_k^3} \left[x_k^2 (r_i + r_k c_j) - \frac{1}{2} (-x_i^2 + x_j^2 + x_k^2) (r_i + r_j c_k) \right]. \quad (2.41)$$

Como $\frac{\text{sen } \theta_j}{x_j} = \frac{\text{sen } \theta_i}{x_i}$ por la ley de senos, entonces basta con probar que los términos entre corchetes en (2.40) y (2.41) son iguales, a los cuales denotaremos B y C , respectivamente. Reescribimos a B y C como

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} x_i^2 (-r_j^2 - r_i r_j c_k) + \frac{1}{2} x_j^2 (r_j^2 + r_i r_j c_k) + \frac{1}{2} x_k^2 (r_j^2 + 2r_j r_k c_i - r_i r_j c_k), \\ C &= \frac{1}{2} x_i^2 (r_i^2 + r_i r_j c_k) + \frac{1}{2} x_j^2 (-r_i^2 - r_i r_j c_k) + \frac{1}{2} x_k^2 (r_i^2 + 2r_i r_k c_j - r_i r_j c_k). \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} B - C &= \frac{1}{2} x_i^2 (-r_i^2 - r_j^2 - 2r_i r_j c_k) + \frac{1}{2} x_j^2 (r_i^2 + r_j^2 + 2r_i r_j c_k) + \frac{1}{2} x_k^2 (r_j^2 + 2r_j r_k c_i - r_i^2 - 2r_i r_k c_j) \\ &= -\frac{1}{2} x_i^2 x_k^2 + \frac{1}{2} x_j^2 x_k^2 + \frac{1}{2} x_k^2 (x_i^2 - x_j^2) = 0, \end{aligned}$$

como queríamos.

Consideremos ahora $\mathbb{G}^2 = \mathbb{H}^2$. Nuevamente (2.38) es equivalente a (2.39). Por (2.20) se tiene

$$\operatorname{sen} \theta_j \frac{\partial \cos \theta_i}{\partial r_j} s_j = -\frac{\operatorname{sen} \theta_j}{y_j y_k^3} \left[y_k^2 (c_k s_j^2 + c_j s_j s_k d_i) + (x_j - x_i x_k) (c_i s_j^2 + c_j s_i s_j d_k) \right], \quad (2.42)$$

$$\operatorname{sen} \theta_i \frac{\partial \cos \theta_j}{\partial r_i} s_i = -\frac{\operatorname{sen} \theta_i}{y_i y_k^3} \left[y_k^2 (c_k s_i^2 + c_i s_i s_k d_j) + (x_i - x_j x_k) (c_j s_i^2 + c_i s_i s_j d_k) \right]. \quad (2.43)$$

La ley de senos hiperbólicos garantiza que $\frac{\operatorname{sen} \theta_j}{y_j} = \frac{\operatorname{sen} \theta_i}{y_i}$, entonces, nuevamente, basta con probar que los términos entre corchetes en (2.42) y (2.43) son iguales, a los cuales denotaremos D y E , respectivamente. Por la ley de cosenos hiperbólicos tenemos

$$\begin{aligned} D &= y_k^2 (c_k s_j^2 + c_j (x_i - c_j c_k)) + (x_j - x_i x_k) (c_i s_j^2 + c_j (x_k - c_i c_j)) \\ &= y_k^2 (c_k s_j^2 - c_j^2 c_k) + x_i y_k^2 c_j + x_j^2 (c_i s_j^2 - c_i c_j^2) + x_j x_k c_j + x_i x_k (c_i c_j^2 - c_i s_j^2) - x_i x_k^2 c_j \\ &= -y_k^2 c_k + x_i y_k^2 c_j - x_j c_i + x_j x_k c_j + x_i x_k c_i - x_i x_k^2 c_j, \\ E &= y_k^2 (c_k s_i^2 + c_i (x_j - c_i c_k)) + (x_i - x_j x_k) (c_j s_i^2 + c_i (x_k - c_j c_i)) \\ &= y_k^2 (c_k s_i^2 - c_i^2 c_k) + x_j y_k^2 c_i + x_i (c_j s_i^2 - c_i^2 c_j) + x_i x_k c_i + x_j x_k (c_i^2 c_j - c_j s_i^2) - x_j x_k^2 c_i \\ &= -y_k^2 c_k + x_j y_k^2 c_i - x_i c_j + x_i x_k c_i + x_j x_k c_j - x_j x_k^2 c_i. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} D - E &= y_k^2 (x_i c_j - x_j c_i) + (x_i c_j - x_j c_i) + x_k^2 (x_j c_i - x_i c_j) \\ &= (x_i c_j - x_j c_i) (y_k^2 + 1 - x_k^2) = 0, \end{aligned}$$

de donde se sigue (2.38). ■

2.4. Evolución de la curvatura bajo el flujo de Ricci combinatorio

En esta sección denotaremos $r(t)$ a una solución de (FR) en algún intervalo de la forma $[0, b)$, con $b < \infty$, y \varkappa será la curvatura de \mathbb{G}^2 . Como trabajaremos todo el tiempo con una solución fija r de (FR), escribiremos $K_i(t)$ y $\theta_i^{jk}(t)$ en lugar de $K_i(r(t))$ y $\theta_i^{jk}(r(t))$. Veremos cómo cambian las curvaturas $K_i(t)$ en el tiempo, para lo cual necesitamos primero saber cómo evolucionan los ángulos $\theta_i^{jk}(t)$.

Proposición 2.7. *Bajo (FR), los ángulos $\theta_i^{jk}(t)$ evolucionan de acuerdo a la ecuación*

$$\frac{d}{dt}\theta_i^{jk}(t) = -A_{ij}^k(K_j(t) - K_i(t)) - A_{ik}^j(K_k(t) - K_i(t)) - \chi A_i^{jk}K_i(t),$$

en donde A_{ij}^k, A_{ik}^j y A_i^{jk} son funciones diferenciables de r_i, r_j y r_k ; en ambas geometrías, son positivas A_{ij}^k y A_{ik}^j , $A_i^{jk} = 0$ si $\mathbb{G}^2 = \mathbb{E}^2$ y $0 < A_i^{jk}$ cuando $\mathbb{G}^2 = \mathbb{H}^2$. Además $A_{ij}^k = A_{ji}^k$.

Demostración. Definimos

$$A_{ij}^k := \frac{\partial \theta_i^{jk}}{\partial r_j} s(r_j), A_{ik}^j := \frac{\partial \theta_i^{jk}}{\partial r_k} s(r_k) \quad \text{y} \quad A_i^{jk} := -\frac{\partial \theta_i^{jk} + \theta_j^{ki} + \theta_k^{ij}}{\partial r_i} s(r_i).$$

Como $0 < s(r_l)$ para cualquier $0 < r_l$, por el Lema 2.3 se tiene que A_{ij}^k y A_{ik}^j son positivas siempre. Del mismo lema se deduce que $A_i^{jk} = 0$ si $\mathbb{G}^2 = \mathbb{E}^2$ y $A_i^{jk} > 0$ si $\mathbb{G}^2 = \mathbb{H}^2$. Por otra parte, la igualdad entre A_{ij}^k y A_{ji}^k se sigue del Lema 2.6. Observemos además que tanto en \mathbb{E}^2 como en \mathbb{H}^2 se cumple que $-A_i^{jk} = \chi A_i^{jk}$. El ángulo θ_i^{jk} sólo depende de los radios r_i, r_j y r_k , por lo que $\frac{\partial \theta_i^{jk}}{\partial r_s} = 0$ si $s \notin \{i, j, k\}$. En consecuencia, al aplicar la regla de la cadena se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\theta_i^{jk} &= \frac{\partial \theta_i^{jk}}{\partial r_j} r_j' + \frac{\partial \theta_i^{jk}}{\partial r_k} r_k' + \frac{\partial \theta_i^{jk}}{\partial r_i} r_i' \\ &= -\frac{\partial \theta_i^{jk}}{\partial r_j} K_j s(r_j) - \frac{\partial \theta_i^{jk}}{\partial r_k} K_k s(r_k) - \frac{\partial \theta_i^{jk}}{\partial r_i} K_i s(r_i) \\ &= -A_{ij}^k(K_j - K_i) - A_{ik}^j(K_k - K_i) - \frac{\partial \theta_i^{jk}}{\partial r_i} K_i s(r_i) - \frac{\partial \theta_i^{jk}}{\partial r_j} K_i s(r_j) - \frac{\partial \theta_i^{jk}}{\partial r_k} K_i s(r_k) \\ &= -A_{ij}^k(K_j - K_i) - A_{ik}^j(K_k - K_i) - \frac{\partial \theta_i^{jk}}{\partial r_i} K_i s(r_i) - \frac{\partial \theta_j^{ki}}{\partial r_i} K_i s(r_i) - \frac{\partial \theta_k^{ij}}{\partial r_i} K_i s(r_i) \\ &= -A_{ij}^k(K_j - K_i) - A_{ik}^j(K_k - K_i) - \chi A_i^{jk} K_i, \end{aligned}$$

como se quería. ■

Ahora, determinar cómo evoluciona la curvatura es sólo cuestión de aplicar repetidas veces la proposición anterior.

Proposición 2.8. *Bajo (FR), la curvatura $K_i(t)$ evoluciona de acuerdo a la siguiente ecuación*

$$\frac{dK_i}{dt} = \sum_{j \in \Gamma(i)} C_{ij}(K_j - K_i) + \varkappa B_i K_i, \quad (2.44)$$

en donde C_{ij} y B_i son funciones de los radios r_1, r_2, \dots, r_N , siendo la primera estrictamente positiva para ambas geometrías y la segunda positiva cuando $\mathbb{G}^2 = \mathbb{H}^2$. Además $C_{ij} = C_{ji}$.

Demostración. Por definición tenemos que $K_i(t) = 2\pi - \sum_{\Delta_{ijk} \in T} \theta_i^{jk}(t)$. De la Proposición 2.7 se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{dK_i}{dt} &= - \sum_{\Delta_{ijk} \in T} \frac{d\theta_i^{jk}}{dt} \\ &= \sum_{\Delta_{ijk} \in T} \left[A_{ij}^k (K_j - K_i) + A_{ik}^j (K_k - K_i) + \varkappa A_i^{jk} K_i \right] \\ &= \sum_{j \in \Gamma(i)} C_{ij} (K_j - K_i) + \varkappa B_i K_i, \end{aligned}$$

en donde $C_{ij} = A_{ij}^k + A_{ij}^{k'}$, siendo k y k' los dos únicos índices para los cuales $\Delta_{ijk}, \Delta_{ijk'} \in T$, y $B_i = \sum_{\Delta_{ijk} \in T} A_i^{jk}$. También por la Proposición 2.7 se sigue que las funciones C_{ij} son estrictamente positivas y simétricas en sus dos índices, que $B_i > 0$ en el caso hiperbólico y que $B_i = 0$ en el caso euclideo. ■

La siguiente proposición es clave para todos los resultados restantes de este capítulo; nos dice que bajo el flujo de Ricci combinatorio, la curvatura en los vértices se comporta bien. Para precisar esto, definimos las funciones

$$\begin{aligned} M(t) &:= \max\{K_i(t) \mid 1 \leq i \leq N\}, & m(t) &:= \min\{K_i(t) \mid 1 \leq i \leq N\}, \\ M_*(t) &:= \max\{0, M(t)\}, & m_*(t) &:= \min\{0, m(t)\}. \end{aligned}$$

A partir de este punto usaremos la siguiente convención: sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es **creciente** si para cualesquiera $t_1, t_2 \in I$ con $t_1 < t_2$ se cumple que $f(t_1) \leq f(t_2)$; decimos que f es **decreciente** si $-f$ es creciente.

Proposición 2.9. (Principio del máximo) *Para cualquier solución $r(t)$ de (FR) se cumple lo siguiente:*

- (i) si $\mathbb{G}^2 = \mathbb{E}^2$, entonces $M(t)$ es decreciente y $m(t)$ es creciente;
- (ii) si $\mathbb{G}^2 = \mathbb{H}^2$, entonces $M_*(t)$ es decreciente y $m_*(t)$ es creciente.

Demostración. Probaremos solamente las afirmaciones para $M(t)$ y $M_*(t)$, ya que las pruebas para $m(t)$ y $m_*(t)$ son análogas.

Sea $f(t) = M(t)$ si $\mathbb{G}^2 = \mathbb{E}^2$ y $f(t) = M_*(t)$ si $\mathbb{G}^2 = \mathbb{H}^2$. Diremos que f baja en $t \in [0, b)$ si existe una constante positiva ε tal que $t + \varepsilon < b$ y f es decreciente en $[t, t + \varepsilon]$. Si podemos demostrar que f baja en t , para todo $t \in [0, b)$, podemos concluir como sigue: consideremos al conjunto

$$D := \{t \in [0, b) \mid f \text{ es decreciente en } [0, t]\}.$$

Como $0 \in D$, el conjunto es no vacío y como está acotado superiormente por b , entonces $\sup D \leq b$. Por otro lado, si $t \in D$ y $\varepsilon > 0$ es tal que f es decreciente en $[t, t + \varepsilon] \subset [0, b)$, como f es también decreciente en $[0, t]$, se tiene entonces que f es decreciente en $[0, t + \varepsilon]$, por lo que $t + \varepsilon \in D$ y por lo tanto $t < \sup D$. Se sigue que $\sup D = b$, por lo que f es decreciente en todo el dominio de la solución $r(t)$.

En el caso $\mathbb{G}^2 = \mathbb{H}^2$, será conveniente denotar K_0 a la función constante 0 en $[0, b)$. Para cada $t \in [0, b)$ definimos los conjuntos siguientes:

$$I(t) := \{i \mid f(t) = K_i(t)\}, \quad I_0(t) := \{i \in I(t) \mid K'_i(t) = 0\}.$$

Observemos ahora que para cada $t \in [0, b)$ existe, $\varepsilon_* > 0$ tal que $t + \varepsilon_* < b$ y, para todo $s \in [t, t + \varepsilon_*]$ se tiene que $I(s) \subset I(t)$. En efecto, ya que si j es tal que $K_j(t) < f(t)$, entonces para todo $i \in I(t)$ se tiene que $K_i(t) - K_j(t) > 0$. Por continuidad existe ε_{ij} positivo tal que $t + \varepsilon_{ij} < b$ y $K_i - K_j$ es positiva en $[t, t + \varepsilon_{ij}]$. Podemos elegir entonces

$$\varepsilon_* = \min\{\varepsilon_{ij} \mid i \in I(t), j \notin I(t)\}. \quad (2.45)$$

Ahora vamos a restringirnos al caso $\mathbb{G}^2 = \mathbb{E}^2$. Si $i \in I(t)$, por la Proposición 2.8 se tiene que

$$K'_i(t) = \sum_{j \in \Gamma(i)} C_{ij}(K_j(t) - K_i(t)),$$

en donde las funciones C_{ij} son positivas y dependen de los radios. Como $K_i(t) = M(t)$, entonces $K'_i(t) \leq 0$ y la igualdad se da si y sólo si $K_j(t) = K_i(t)$ para todo $j \in \Gamma(i)$, es decir, si $\Gamma(i) \subset I(t)$.

Lema 2.10. *Si $I_0(t) \neq \emptyset$, existe una constante $\varepsilon_{**} > 0$ tal que para toda $s \in [t, t + \varepsilon_{**}]$, se tiene $I(s) \subset I_0(t)$.*

Demostración. Si $I_0(t) = I(t)$, se puede tomar $\varepsilon_{**} = \varepsilon_*$. Podemos suponer ahora que $I_0(t) \subsetneq I(t)$. Si $j \in I(t) \setminus I_0(t)$, entonces para toda $i \in I_0(t)$ se tiene

$$0 < -K'_j(t) = K'_i(t) - K'_j(t).$$

Por continuidad existe $\varepsilon_{ij} > 0$ tal que $t + \varepsilon_{ij} < b$ y $K'_i - K'_j$ es positiva en $[t, t + \varepsilon_{ij}]$. Esto implica que $K_i - K_j$ es estrictamente creciente en este intervalo, así que para cualquier $s \in (t, t + \varepsilon_{ij}]$ se tiene

$$0 = K_i(t) - K_j(t) < K_i(s) - K_j(s),$$

y entonces $j \notin I(s)$. ■

Probaremos ahora que $M(t)$ baja en t en dos casos particulares: cuando $I_0(t) = \emptyset$ y cuando $I_0(t) = \{1, 2, \dots, N\}$.

Caso 1. $I_0(t) = \emptyset$

Se tiene que $K'_i(t) < 0$ para todo $i \in I(t)$. Por continuidad, existe ε_i positivo tal que $t + \varepsilon_i < b$ y K'_i es negativa en $[t, t + \varepsilon_i]$, por lo que K_i es estrictamente decreciente en este intervalo. Escogemos $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i \mid i \in I(t)\} \cup \{\varepsilon_*\}$. Sean $t_1, t_2 \in [t, t + \varepsilon]$ con $t_1 < t_2$. Como $\varepsilon \leq \varepsilon_*$, entonces $I(t_2) \subset I(t)$, por lo cual si $i \in I(t_2)$, como $\varepsilon \leq \varepsilon_i$, se tiene

$$M(t_2) = K_i(t_2) \leq K_i(t_1) \leq M(t_1),$$

así que M es decreciente en $[t, t + \varepsilon]$.

Caso 2. $I_0(t) = \{1, 2, \dots, N\}$

Observemos que en este caso se tiene $I(t) = \{1, 2, \dots, N\}$, de donde

$$K_1(t) = K_2(t) = \dots = K_N(t) = M(t).$$

Como veremos enseguida, esto nos permite determinar cómo es la solución $r(t)$ en $[t, b)$. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, definamos $\tilde{r}_i : [t, b) \rightarrow (0, \infty)$ como $\tilde{r}_i(s) = r_i(t)e^{-M(t)(s-t)}$ y sea $\tilde{r}(t) = (\tilde{r}_1(t), \tilde{r}_2(t), \dots, \tilde{r}_N(t))$. Denotemos $\tilde{K}_i(s)$ a la curvatura de $v_i \in V$ con respecto a $\tilde{r}(s)$. Como $\tilde{r}(s)$ es un múltiplo de $r(t)$, se sigue que $\tilde{K}_i(s) = K_i(t)$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ y para todo $s \in [t, b)$. Entonces

$$\tilde{r}'_i(s) = -M(t)r_i(t)e^{-M(t)(s-t)} = -K_i(t)r_i(t)e^{-M(t)(s-t)} = \tilde{K}_i(s)\tilde{r}_i(s),$$

por lo tanto \tilde{r} es solución de (FR). Como además $\tilde{r}(t) = r(t)$, entonces \tilde{r} y r coinciden en la intersección de sus dominios. Se sigue que $M(t)$ es constante en $[t, b)$, en particular es decreciente. Podemos elegir $\varepsilon = \frac{1}{2}(b - t)$.

Para terminar, supongamos que existe algún tiempo en $[0, b)$ en el cual $M(t)$ no baja. De entre todos estos tiempos, elegimos t de manera tal que el conjunto $I_0(t)$ tenga el menor tamaño posible. Sabemos que para tal t , el conjunto $I_0(t)$ es no vacío. Como $M(t)$ no baja en t , entonces

no es decreciente en $[t, t + \varepsilon_{**}]$. Sean t_1 y t_2 en este intervalo tales que $t_1 < t_2$ y $M(t_1) < M(t_2)$. Sea

$$t_3 = \text{máx}\{s \in [t_1, t_2] \mid M(s) = M(t_1)\}.$$

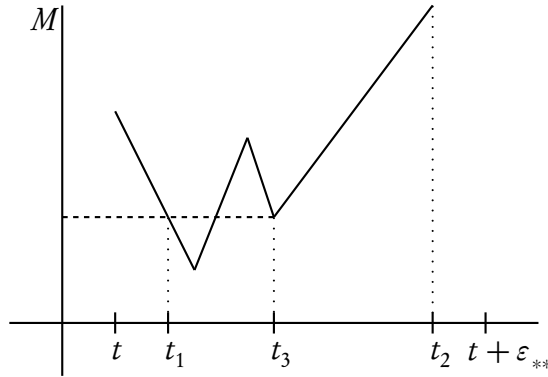
Entonces $M(t_3) < M(s)$ para cualquier $s \in (t_3, t_2)$, por lo que $M(t)$ no baja en t_3 . Además, como $t_3 \in [t, t + \varepsilon_{**}]$, entonces $I(t_3) \subset I_0(t)$, así que también $I_0(t_3) \subset I_0(t)$. Por la elección de t se sigue que $I_0(t_3) = I_0(t)$. Tenemos entonces

$$I_0(t_3) \subset I(t_3) \subset I(t) = I_0(t_3),$$

así que $I_0(t_3) = I(t_3)$. Mostraremos ahora que esto implica que $I_0(t_3) = \{1, 2, \dots, N\}$, lo que nos lleva a una contradicción porque entonces $M(t)$ tendría que bajar en t_3 . Ya sabíamos que si $i \in I_0(t_3)$, como $K'_i(t_3) = 0$, entonces

$$\Gamma(i) \subset I(t_3) = I_0(t_3).$$

Como S es conexa, para cualquier $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ existe una sucesión de vértices $v_i = v_{j_0}, v_{j_1}, \dots, v_{j_s} = v_k$ tal que $j_l \in \Gamma(j_{l-1})$ para cada $l \in \{1, \dots, s\}$. Como $j_1 \in \Gamma(j_0)$ y $j_0 = i \in I_0(t_3)$, entonces $j_1 \in I_0(t_3)$. Repitiendo este argumento $s - 1$ veces más llegamos a que $k = j_s \in I_0(t_3)$. Entonces $I_0(t_3) = \{1, 2, \dots, N\}$.



Vamos a considerar ahora $\mathbb{G}^2 = \mathbb{H}^2$ y la función $M_*(t)$. Por la Proposición 2.8 se tiene que

$$K'_i(t) = \sum_{j \in \Gamma(i)} C_{ij}(K_j(t) - K_i(t)) - B_i K_i(t)$$

para algunas funciones positivas C_{ij}, B_i de los radios. Si tomamos $i \in I(t)$, como $K_i(t) = \text{máx}\{K_0(t), M(t)\}$, se tiene que $K_j(t) \leq K_i(t)$ para toda j , en particular para $j \in \Gamma(i)$, y que $K_i(t) \geq 0$, de donde $K'_i(t) \leq 0$ y la igualdad se da si y sólo si $\Gamma(i) \subset I(t)$ y $K_i(t) = 0$.

Ahora probaremos que $M_*(t)$ baja en $t \in [0, b)$ cuando $I_0(t) = \emptyset$, $\{1, 2, \dots, N\} \subset I_0(t)$ o $I_0(t) = \{0\}$. El primer caso se demuestra de manera similar manera como hicimos cuando $\mathbb{G}^2 = \mathbb{E}^2$. Por otra parte, si $t \in [0, b)$ es tal que $\{1, 2, \dots, N\} \subset I_0(t)$, entonces

$$K_1(t) = K_2(t) = \dots = K_N(t) = 0.$$

Como ahora mostraremos, esto implica que la solución $r(t)$ es constante en $[t, b)$. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, definimos $\tilde{r}_i : [t, b) \rightarrow (0, \infty)$ como $\tilde{r}_i \equiv r_i(t)$. Sea $\tilde{r}(t) = (\tilde{r}_1(t), \tilde{r}_2(t), \dots, \tilde{r}_N(t))$. Cada \tilde{r}_i es constante, entonces $\tilde{r}'_i \equiv 0$, y $\tilde{K}_i(s) = K_i(t) = 0$ para todo $s \in [t, b)$, por lo que

$$\tilde{r}'_i(s) = 0 = -\tilde{K}_i(s)\tilde{r}_i(s),$$

y entonces \tilde{r} es solución de (FR) en el intervalo $[t, b)$; además $\tilde{r}(t) = r(t)$, por lo tanto $\tilde{r} = r$ en $[0, b)$. Podemos elegir $\varepsilon = \frac{1}{2}(b - t)$. Finalmente, si $I_0(t) = \{0\}$, para toda $i \in I(t) \setminus \{0\}$ se tiene $K'_i(t) < 0$, por lo que K_i baja en t . También, es claro que K_0 baja en t , por lo tanto $M_*(t)$ baja en t .

Si existiera un tiempo en el que $\max\{0, M\}$ no baja, de nuevo podemos elegir t con esta propiedad y con $I_0(t)$ del menor tamaño posible. Sabemos entonces que $I_0(t)$ es no vacío y que $I_0(t) \neq \{0\}$, entonces $I_0(t) \cap \{1, 2, \dots, N\} \neq \emptyset$ y podemos concluir como cuando $\mathbb{G}^2 = \mathbb{E}^2$. ■

2.5. Existencia de soluciones a largo plazo

En esta sección probaremos que para ambas geometrías, dada cualquier métrica de empacamiento $r_0 = (r_1, r_2, \dots, r_N)$, la solución máxima $r(t)$ de (FR) con condición inicial r_0 , está definida para todo $t \geq 0$, lo cual implica que lo mismo es cierto para el flujo de Ricci combinatorio. La herramienta principal para esto será el siguiente resultado clásico de Ecuaciones Diferenciales.

Lema 2.11. (Lema de escape) Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial. Supongamos que $b < \infty$ y $\alpha : (a, b) \rightarrow U$ es una curva integral de X . Si existe un compacto $K \subset U$ tal que $\alpha[(a, b)] \subset K$, entonces α se puede extender a un intervalo de la forma $(a, b + \varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$.

Demostración. Sea $(t_n)_{n=0}^\infty \subset (a, b)$ una sucesión creciente que converge a b . La sucesión $(\alpha(t_n))_{n=0}^\infty$ está contenida en el compacto K , por lo que tiene una subsucesión $(\alpha(t_{n_s}))_{s=0}^\infty$ que converge a un punto p en K . Sea $f : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times U_0 \rightarrow U$ un flujo local de X , para algún $\varepsilon_1 > 0$ y un abierto $U_0 \subset U$ tal que $p \in U_0$. Elijamos un entero positivo m suficientemente grande de manera tal que $\alpha(t_{n_m}) \in U_0$ y $b - t_{n_m} < \varepsilon_1$. Definimos $\beta : (t_{n_m} - \varepsilon_1, t_{n_m} + \varepsilon_1) \rightarrow U$ como

$$\beta(t) = f\left(t - t_{n_m}, \alpha(t_{n_m})\right).$$

Notemos que β es curva integral de X porque

$$\begin{aligned}\dot{\beta}(t) &= \dot{f}(t - t_{n_m}, \alpha(t_{n_m})) \cdot \frac{d}{dt} [t - t_{n_m}] \\ &= X(f(t - t_{n_m}, \alpha(t_{n_m}))) \\ &= X(\beta(t)).\end{aligned}$$

Además

$$\beta(t_{n_m}) = f(0, \alpha(t_{n_m})) = \alpha(t_{n_m}),$$

entonces, por la unicidad de soluciones, coinciden α y β en la intersección de sus dominios. Se sigue que podemos extender α a $(a, b) \cup (t_{n_m} - \varepsilon_1, t_{n_m} + \varepsilon_1)$. ■

Proposición 2.12. Si $\mathbb{G}^2 \in \{\mathbb{E}^2, \mathbb{H}^2\}$, para cualquier métrica de empaquetamiento $r_0 \in (0, \infty)^N$, la solución máxima $r(t)$ de (FR) con condición inicial r_0 está definida para todo $t \geq 0$.

Demostración. Sea $r : [0, b) \rightarrow (0, \infty)^N$ una solución del flujo de Ricci combinatorio con $b < \infty$ y $r(0) = r_0$. Denotemos d_i al grado del vértice v_i . Observemos que por la definición de triangulación se tiene que $d_i > 2$. En ambas geometrías, cualquier ángulo interior de un triángulo está en el intervalo $(0, \pi)$; como $K_i = 2\pi - \sum_{\Delta_{ijk} \in T} \theta_i^{jk}$, se sigue que

$$\pi(2 - d_i) < K_i(t) < 2\pi. \quad (2.46)$$

Consideremos primero el caso $\mathbb{G}^2 = \mathbb{E}^2$. Por (2.46) y (FR) tenemos

$$-2\pi < \frac{r'_i(t)}{r_i(t)} < \pi(d_i - 2).$$

De la monotonía de la integral se sigue que para todo $t \in [0, b)$ se cumple

$$-2\pi t < \int_0^t \frac{r'_i(s)}{r_i(s)} ds < \pi(d_i - 2)t,$$

pero $\frac{r'_i(s)}{r_i(s)} = \frac{d}{ds} \log r_i(s)$, así que

$$-2\pi t < \log r_i(t) - \log r_i(0) < \pi(d_i - 2)t.$$

Aplicando la función exponencial y acomodando llegamos a

$$r_i(0)e^{-2\pi t} < r_i(t) < r_i(0)e^{\pi(d_i - 2)t}. \quad (2.47)$$

La función $f(x) = e^{ax}$ es creciente si $a > 0$ y decreciente si $a < 0$, entonces de (2.47) se sigue que

$$r[[0, b]] \subset \prod_{j=i}^N [r_j(0), r_j(0)e^{\pi(d_j-2)b}] \subset (0, \infty)^N,$$

así que el Lema 2.11 nos asegura que $r(t)$ se puede extender a un intervalo de la forma $[0, b + \varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$. Como se puede hacer esto para todo $b > 0$, se concluye entonces que la solución $r(t)$ se extiende a $[0, \infty)$.

Consideremos ahora el caso hiperbólico. La estrategia a seguir es la misma que en el caso precedente: vamos a probar que para cada $1 \leq i \leq N$ existen constantes positivas C_{i_1}, C_{i_2} tales que $C_{i_1} \leq r_i(t) \leq C_{i_2}$ para todo $t \in [0, b)$. Comenzamos reescribiendo (FR) como

$$-\frac{r'_i(t)}{\sinh r_i(t)} = K_i(t). \quad (2.48)$$

Observemos que

$$\frac{d}{dt} \log \left(\coth \frac{r_i(t)}{2} \right) = -\frac{r'_i(t)}{\sinh r_i(t)}. \quad (2.49)$$

Como K_i es siempre menor que 2π , entonces

$$\log \left(\coth \frac{r_i(t)}{2} \right) - \log \left(\coth \frac{r_i(0)}{2} \right) = \int_0^t K_i(t) dt < 2\pi t,$$

y aplicando la función exponencial se llega a

$$\coth \left(\frac{r_i(t)}{2} \right) < C e^{2\pi t}, \quad (2.50)$$

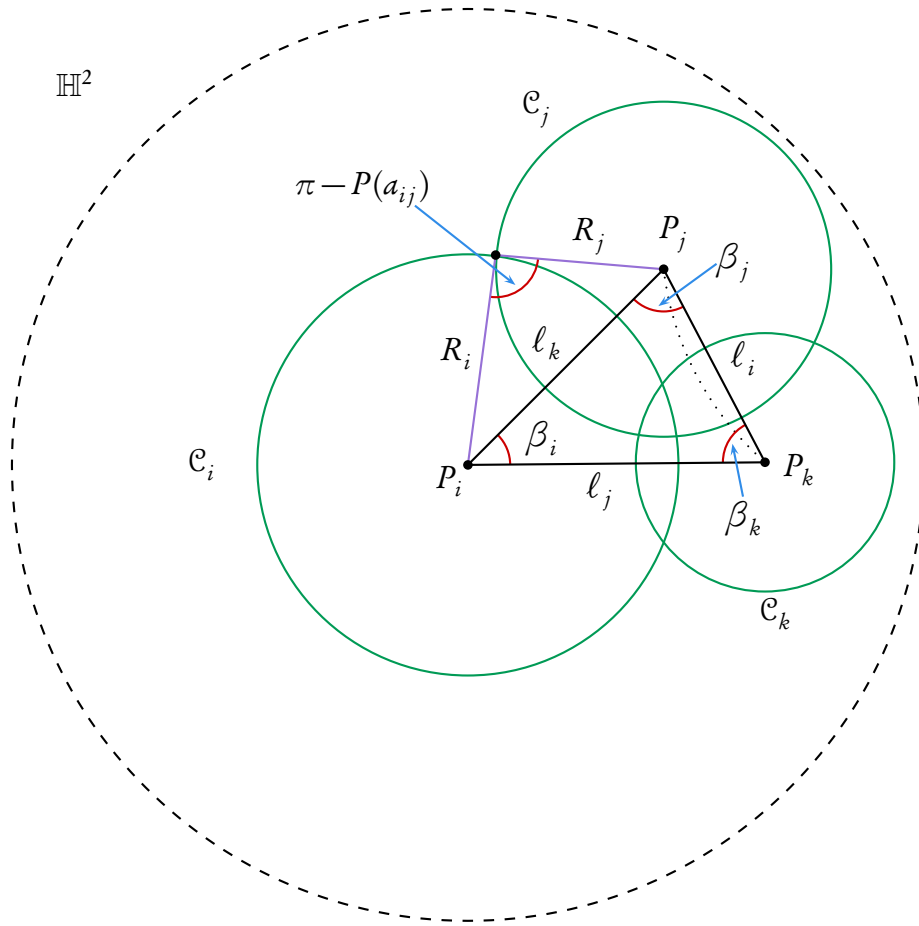
en donde $C = \coth \left(\frac{r_i(0)}{2} \right) > 0$. Si hubiera una sucesión $(t_n)_{n=0}^\infty \subset [0, b)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_i(t_n) = 0$, se tendría que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \coth \left(\frac{r_i(t_n)}{2} \right) = \infty,$$

pero esto no es posible por (2.50), ya que $t_n < b$ para toda $n \geq 0$. Por lo tanto, existe una constante positiva C_{i_1} tal que para todo $t \in [0, b)$ se cumple que $C_{i_1} \leq r_i(t)$. Para acotar a $r_i(t)$ por arriba requerimos el siguiente lema.

Lema 2.13. *Para todo $\varepsilon > 0$ existe un real $L_\varepsilon > 0$ tal que si $r_i > L_\varepsilon$, entonces $\theta_i^{jk} < \varepsilon$.*

Demostración. Sea $\Delta_{ijk} \in T$. Consideremos en \mathbb{H}^2 tres circunferencias hiperbólicas $\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j, \mathcal{C}_k$ que realicen a Δ_{ijk} , con \mathcal{C}_i centrada en el origen. Estas circunferencias también son circunferencias euclidianas, y aunque para \mathcal{C}_j y \mathcal{C}_k no coinciden el centro hiperbólico con el centro euclidiano, estos están alineados con el origen. Denotemos R_m al radio euclidiano de \mathcal{C}_m . Como R_i crece cuando r_i crece, basta con probar que existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que $\theta_i^{jk} < \varepsilon$ si $R_i > \delta_\varepsilon$. De ahora en adelante, todas las nociones métricas a las que hagamos referencia serán con respecto a la métrica euclidiana de \mathbb{D} . Denotemos P_m al centro de \mathcal{C}_m y Δ al triángulo con vértices P_i, P_j y P_k . En Δ , denotemos ℓ_m a la longitud del lado opuesto a P_m y β_m al ángulo interior en P_m . En particular se tiene que $\beta_i = \theta_i^{jk}$.



Aplicando la ley de cosenos en Δ obtenemos

$$\ell_k^2 = R_i^2 + R_j^2 - 2R_i R_j \cos(\pi - P(a_{ij})).$$

Como $0 \leq P(a_{ij}) < \frac{\pi}{2}$, entonces $\cos(\pi - P(a_{ij})) < 0$, y por lo tanto $R_i^2 + R_j^2 \leq \ell_k^2$. Además $\ell_k < 1$, de donde $R_j < \sqrt{1 - R_i^2}$ y $R_k < \sqrt{1 - R_i^2}$. Entonces, por la ley de senos aplicada en Δ tenemos

$$\sin \theta_i^{jk} = \frac{\ell_i}{\ell_j} \sin \beta_j \leq \frac{\ell_i}{\ell_j} \leq \frac{R_j + R_k}{\ell_j} \leq \frac{2\sqrt{1 - R_i^2}}{\ell_j} \leq \frac{2\sqrt{1 - R_i^2}}{R_i},$$

y haciendo tender R_i a 1, se sigue el resultado. ■

Regresando a la prueba principal, si existiera una sucesión $(t_n)_{n=0}^\infty \subset [0, b]$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_i(t_n) = \infty$, por el lema anterior se tendría que $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_i^{jk} = 0$ para cualquier $\Delta_{ijk} \in T$. En consecuencia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_i(t_n) = 2\pi,$$

pero esto no es posible, ya que por la Proposición 2.9 se cumple

$$K_i(t_n) \leq \max\{0, M(t_n)\} \leq \max\{0, M(0)\},$$

y $\max\{0, M(0)\}$ es una constante menor que 2π . De esto se deduce que existe una constante positiva C_{i_2} tal que $r_i(t) \leq C_{i_2}$ para todo $t \in [0, b]$. Entonces hemos demostrado que

$$r[[0, b]] \subset \prod_{j=1}^N [C_{j_1}, C_{j_2}] \subset (0, \infty)^N.$$

Del Lema 2.11 se sigue que r se extiende a un intervalo más grande $[0, b + \varepsilon]$. Como esto es cierto para todo $b > 0$, entonces r se puede extender a $[0, \infty]$. ■

2.6. Un teorema que garantiza la convergencia

A partir de este punto, tabajaremos con (FR) si la geometría base es \mathbb{H}^2 , y con (FRN) si la geometría base es \mathbb{E}^2 . Consideraremos soluciones r definidas para todo $t \geq 0$. Daremos una condición suficiente para garantizar que $r(t)$ converge a una métrica de empacamiento con curvatura 0 en cada vértice si $\mathbb{G}^2 = \mathbb{H}^2$, o con curvatura K_{pr} en cada vértice si $\mathbb{G}^2 = \mathbb{E}^2$. Esto nos permitirá en el Capítulo 3 darle una métrica hiperbólica a nuestra superficie en el primer caso, o una métrica plana en el segundo si la superficie es un toro o una botella de Klein. La condición será la misma que en el Lema 2.11: que $r[[0, \infty]]$ se quede contenido en un compacto, a su vez contenido en $(0, \infty)^N$. Con ayuda de este resultado, en el capítulo 3 haremos un análisis cuidadoso tomando en cuenta la topología de la superficie S , que nos permitirá encontrar condiciones necesarias y suficientes en la triangulación con pesos (Φ, P) para asegurar la convergencia de las soluciones de (FR) o (FRN), según sea el caso.

Teorema 2.14. *Supongamos que $r(t)$ es una solución al flujo de Ricci con geometría base \mathbb{H}^2 para la cual existe un compacto $K \subset (0, \infty)^N$ que contiene a $r[[0, \infty)]$. Entonces $r(t)$ converge en $(0, \infty)^N$ a una métrica de empaquetamiento cuya curvatura en cada vértice es 0.*

Demostración. Como las funciones B_i que se mencionan en el Lema 2.8 son positivas y K es compacto, los valores mínimo y máximo de B_i en este conjunto son positivos. Si los denotamos c_{i1} y c_{i2} , respectivamente, para todo $t \geq 0$ se tiene

$$c_{i1} \leq B_i(r_1(t), r_2(t), \dots, r_N(t)) \leq c_{i2}.$$

Podemos considerar

$$c_1 = \min\{c_{i1} \mid 1 \leq i \leq N\} \quad \text{y} \quad c_2 = \max\{c_{i2} \mid 1 \leq i \leq N\}$$

para acotar a todas las B_i con las mismas constantes. Denotemos, como antes, $M_*(t) = \max\{0, M(t)\}$ y $m_*(t) = \min\{0, m(t)\}$. Necesitamos el siguiente lema para continuar.

Lema 2.15. *Para todo $t \geq 0$ se cumple*

$$M_*(t) \leq M_*(0)e^{-c_1 t} \quad \text{y} \quad m_*(0)e^{-c_2 t} \leq m_*(t)$$

Demostración. Probaremos únicamente la desigualdad para M_* , ya que la demostración de la otra es análoga. Sea Z el conjunto de todos los $t \in [0, \infty)$ tales que $M_*(s) \leq M_*(0)e^{-c_1 s}$ para cada $s \in [0, t]$. Como la desigualdad se cumple en $t = 0$, entonces $0 \in Z$. Para concluir, bastará con demostrar que para todo $t \in Z$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $t + \varepsilon \in Z$. Dividiremos la prueba en dos casos: $M_*(t) = 0$ y $M_*(t) > 0$.

Caso 1. $M_*(t) = 0$

Por la Proposición 2.9 se tiene que $M_* \equiv 0$ en $[t, \infty)$. Tomamos $\varepsilon = 1$; la desigualdad se cumple en todo $[t, t + \varepsilon]$ porque para cualquier s en tal intervalo

$$M_*(s) = 0 \leq M_*(0)e^{-c_1 s},$$

y por hipótesis la desigualdad es válida en $[0, t]$, así que $t + \varepsilon \in Z$.

Caso 2. $M_*(t) > 0$

Consideremos nuevamente al conjunto $I(t) = \{i \mid K_i(t) = M_*(t)\}$ y ε_* como en (2.45). Para cada $i \in I(t)$, se tiene $K_i(t) = M_*(t) > 0$; por continuidad, existe $\varepsilon_i > 0$ tal que K_i es positivo en $[t, t + \varepsilon_i]$. Sea

$$\varepsilon = \min\{\varepsilon_i \mid i \in I(t)\} \cup \{\varepsilon_*\}.$$

Para todo $s \in [t, t + \varepsilon]$ se cumple que $I(s) \subset I(t)$ porque $\varepsilon \leq \varepsilon_*$. Tenemos entonces

$$K'_i(s) = \sum_{j \in \Gamma(i)} C_{ij}(K_j(s) - K_i(s)) - B_i K_i(s) \leq -B_i K_i(s) \leq -c_1 K_i(s).$$

Como K_i es positiva en $[t, t + \varepsilon]$, entonces $\log K_i$ está definido; podemos entonces argumentar como en (2.47) para llegar a que $K_i(s) \leq K_i(t)e^{-c_1(s-t)}$ para todo $s \in [t, t + \varepsilon]$ y para todo $i \in I(s)$. Por lo tanto tenemos

$$M_*(s) = K_i(s) \leq K_i(t)e^{-c_1(s-t)} = M_*(t)e^{-c_1(s-t)} \leq M_*(0)e^{-c_1 t} e^{-c_1(s-t)} = M_*(0)e^{-c_1 s},$$

y entonces $t + \varepsilon \in Z$.

La prueba de la desigualdad para $m_*(t)$ es exactamente la misma, invirtiendo todas las desigualdades. ■

Como consecuencia del Lema 2.15, para cada $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ se tiene

$$m_*(0)e^{-c_2 t} \leq m_*(t) \leq K_i(t) \leq M_*(t) \leq M_*(0)e^{-c_1 t},$$

de donde $K_i(\infty) = 0$. Además, como las funciones en los extremos son integrables de 0 a ∞ , entonces $K_i(t)$ también lo es. Por (2.49), integrando de 0 a ∞ obtenemos

$$\int_0^\infty K_i(t) dt = \log \coth\left(\frac{r_i(\infty)}{2}\right) - \log \coth\left(\frac{r_i(0)}{2}\right),$$

de donde $r_i(\infty)$ es positivo. Por lo tanto $r(\infty)$ es una métrica de empacamiento con curvatura 0 en todos los vértices. ■

Teorema 2.16. *Supongamos que $r(t)$ es una solución al flujo de Ricci normalizado con geometría base \mathbb{E}^2 para la cual existe un compacto $K \subset (0, \infty)^N$ que contiene a $r[[0, \infty)]$. Entonces $r(t)$ converge en $(0, \infty)^N$ a una métrica de empacamiento cuya curvatura en cada vértice es K_{pr} .*

Demostración. Definamos la función $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(t) = \sum_{i=1}^N (K_i(t) - K_{pr})^2.$$

Esta función es no negativa; trataremos por separado los casos en que f se anula en algún punto, y cuando es estrictamente positiva.

Si existiera algún $t \in [0, \infty)$ para el cual $f(t) = 0$, entonces $K_i(t) = K_{pr}$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, N\}$; veremos que, si esto pasa, la solución r se estaciona en $r(t)$. Definimos $\tilde{r}_i : [t, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ como $\tilde{r}_i \equiv r_i(t)$ y sea $\tilde{r} = (\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_N)$. Tenemos que $K_i(\tilde{r}(s)) = K_i(r(t))$ para todo $s \in [0, \infty)$, entonces

$$\tilde{r}'_i(s) = 0 = -(K_i(t) - K_{pr})r_i(t) = -(\tilde{K}_i(s) - K_{pr})\tilde{r}_i(s),$$

Entonces \tilde{r} es solución de (FRN) en $[t, \infty)$; más aún, \tilde{r} y r coinciden en este intervalo porque $\tilde{r}(t) = r(t)$. Concluimos que $r(\infty) = r(t)$ es una métrica de empaquetamiento con curvatura K_{pr} en todos los vértices.

Supongamos ahora que $f(t)$ es positiva para todo $t \geq 0$. Como probaremos más adelante, existe una constante positiva c tal que

$$f'(t) \leq -cf(t). \quad (2.51)$$

Teniendo esto, podemos concluir como sigue: como $\log f(t)$ está definido, podemos argumentar como en (2.47) para llegar a

$$f(t) \leq f(0)e^{-ct} \quad (2.52)$$

para todo $t \geq 0$, pero $(K_i(t) - K_{pr})^2 \leq f(t)$, entonces $K_i(\infty) = K_{pr}$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Usando (2.52) se tiene

$$-\sqrt{f(0)}e^{-\frac{ct}{2}} \leq K_i(t) - K_{pr} \leq \sqrt{f(0)}e^{-\frac{ct}{2}},$$

y como las funciones en los extremos son integrables de 0 a ∞ , entonces $K_i(t) - K_{pr}$ también. Por otro lado, reescribimos la ecuación (FRN) como

$$-(K_i(t) - K_{pr}) = \frac{r'_i(t)}{r_i(t)} = \frac{d}{dt} [\log r_i(t)],$$

e integrando de 0 a ∞ llegamos a

$$-\int_0^\infty (K_i(t) - K_{pr}) dt = \log r_i(\infty) - \log r_i(0),$$

y como \log está definido sólo para los reales positivos, se sigue que $r_i(\infty)$ es positivo. Entonces $r(\infty)$ es una métrica de empaquetamiento con curvatura K_{pr} en todos los vértices. Sólo nos resta encontrar una constante $c > 0$ tal que se cumpla (2.51). Comencemos observando que como $r(t)$ es solución de (FRN), entonces $\tilde{r}(t) = \frac{r(t)}{e^{K_{pr}t}}$ es solución de (FR), pero $\tilde{r}(t)$ es un múltiplo de $r(t)$, por lo tanto $K_i(r(t)) = K_i(\tilde{r}(t))$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Se sigue que $K_i(r(t))$ también evoluciona de acuerdo a la ecuación (2.44). Desarrollando $f(t)$ obtenemos

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{i=1}^N (K_i(t) - K_{pr})^2 = \sum_{i=1}^N K_i^2(t) - 2K_{pr} \sum_{i=1}^N K_i(t) + NK_{pr}^2 \\ &= \sum_{i=1}^N K_i^2(t) - 2K_{pr}(NK_{pr}) + NK_{pr}^2 = \sum_{i=1}^N K_i^2(t) - NK_{pr}^2, \end{aligned}$$

y derivando con respecto a t llegamos a

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \sum_{i=1}^N 2K_i(t)K_i'(t) \\
&= 2 \sum_{i=1}^N K_i(t) \sum_{j \in \Gamma(i)} C_{ij}(K_j(t) - K_i(t)) \\
&= 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Gamma(i)} C_{ij}(K_j(t) - K_i(t))K_i(t) \\
&= 2 \sum_{\substack{j \in \Gamma(i) \\ j < i}} \left[C_{ij}(K_j(t) - K_i(t))K_i(t) + C_{ji}(K_i(t) - K_j(t))K_j(t) \right] \\
&= 2 \sum_{\substack{j \in \Gamma(i) \\ j < i}} \left[C_{ij}(K_j(t) - K_i(t))K_i(t) + C_{ij}(K_i(t) - K_j(t))K_j(t) \right] \\
&= -2 \sum_{\substack{j \in \Gamma(i) \\ j < i}} C_{ij}(K_j(t) - K_i(t))^2 \\
&= - \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Gamma(i)} C_{ij}(K_j(t) - K_i(t))^2.
\end{aligned}$$

Las funciones C_{ij} son continuas y positivas, y K es compacto, por lo que existe $c_1 > 0$ tal que

$$c_1 \leq C_{ij}(r_1(t), r_2(t), \dots, r_N(t))$$

para todo $t \geq 0$ y para cualesquiera índices i, j con $j \in \Gamma(i)$. Se tiene entonces

$$f'(t) \leq -c_1 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Gamma(i)} (K_j(t) - K_i(t))^2. \quad (2.53)$$

Ahora daremos una cota para el lado derecho de la desigualdad anterior usando el siguiente lema.

Lema 2.17. *Existe una constante positiva c_2 , que sólo depende de la triangulación \mathcal{K} , tal que*

$$c_2 \sum_{i,j=1}^N (K_j - K_i)^2 \leq \sum_{i=1}^N \sum_{i \in \Gamma(i)} (K_j - K_i)^2$$

para cualquier métrica de empacamiento (r_1, r_2, \dots, r_N) .

Demostración. Como S es conexa, para cualesquiera dos vértices distintos v_i y v_j , existe una sucesión de vértices $v_j = v_{k_0}, v_{k_1}, \dots, v_{k_s} = v_i$ tal que $k_l \in \Gamma(k_{l-1})$ para todo $l \in \{1, \dots, s\}$. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos

$$(K_j - K_i)^2 = \left(\sum_{l=1}^s (K_{k_{l-1}} - K_{k_l}) \right)^2 \leq \left(\sum_{l=1}^s 1^2 \right) \left(\sum_{l=1}^s (K_{k_{l-1}} - K_{k_l})^2 \right) = s \sum_{l=1}^s (K_{k_{l-1}} - K_{k_l})^2.$$

Sumando todas estas desigualdades para todos los índices $i \neq j$ llegamos a

$$\sum_{i,j=1}^N (K_j - K_i)^2 \leq \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Gamma(i)} b_{ij} (K_j - K_i)^2,$$

para algunos enteros $b_{ij} \geq 0$. Si $B = \max\{b_{ij} \mid 1 \leq i \leq N, j \in \Gamma(i)\}$, tenemos

$$\sum_{i,j=1}^N (K_j - K_i)^2 \leq B \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Gamma(i)} (K_j - K_i)^2,$$

por lo que podemos elegir $c_2 = \frac{1}{B}$. ■

Ahora tomemos $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ y $t \in [0, \infty)$. La función $g_i(x) = (K_i(t) - x)^2$ es convexa, por lo que podemos aplicar la desigualdad de Jensen como sigue:

$$N(K_i(t) - K_{pr})^2 = N g_i \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_j(t) \right) \leq \sum_{j=1}^N g_i(K_j(t)) = \sum_{j=1}^N (K_i(t) - K_j(t))^2.$$

Sumando para todo $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ obtenemos

$$Nf(t) \leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (K_i(t) - K_j(t))^2 \quad (2.54)$$

Finalmente, por (2.14), el Lema 2.17 y (2.54) se tiene

$$f'(t) \leq -c_1 \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Gamma(i)} (K_j(t) - K_i(t))^2 \leq -c_1 c_2 \sum_{i,j=1}^N (K_j(t) - K_i(t))^2 \leq -c_1 c_2 N f(t),$$

entonces podemos tomar $c = c_1 c_2 N$. ■

2.7. Unicidad: las curvaturas determinan a la métrica

En esta sección abordaremos la siguiente pregunta que surge de manera natural: si

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_N)$$

es una métrica de empacamiento cuyas curvaturas en los vértices son $K(\mathbf{r}) = (K_1, K_2, \dots, K_N)$, ¿existirá alguna otra métrica de empacamiento $\tilde{\mathbf{r}}$ tal que $K(\tilde{\mathbf{r}}) = K(\mathbf{r})$? Si $\mathbb{G}^2 = \mathbb{E}^2$, como hemos mencionado en repetidas ocasiones, se cumple $K(\mathbf{r}) = K(\lambda\mathbf{r})$ para todo $\lambda > 0$. ¿Habrá otras? ¿Qué sucede en el caso hiperbólico? Antes de enunciar el resultado que nos ayudará a contestar estas preguntas, necesitamos una definición y un poco de notación. Sean $V \subset \mathbb{R}^N$ un abierto, $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y \mathbf{v} un punto en V . Denotaremos $H_{\mathbf{v}}^h$ al **hessiano** de h en \mathbf{v} y $\text{grad}h$ al **campo gradiente** de h . Si V es convexo, diremos que h es una **función estrictamente convexa (convexa)** si para todo $\mathbf{v} \in V$, el hessiano de h en \mathbf{v} es definido positivo (semidefinido positivo).

Lema 2.18. *Sean $V \subset \mathbb{R}^N$ un abierto convexo y $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente convexa. Entonces $\text{grad}h : V \rightarrow \mathbb{R}^N$ es inyectivo.*

Demostración. Tomemos dos puntos distintos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ en V y sea $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$g(t) = h(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})).$$

Derivando g llegamos a

$$\begin{aligned} g'(t) &= \text{grad}h(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}))(\mathbf{y} - \mathbf{x})^T \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial h}{\partial v_i}(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}))(y_i - x_i). \end{aligned}$$

Derivando una vez más obtenemos

$$\begin{aligned} g''(t) &= \sum_{i=1}^N (y_i - x_i) \text{grad} \frac{\partial h}{\partial v_i}(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}))(\mathbf{y} - \mathbf{x})^T \\ &= (\mathbf{y} - \mathbf{x}) H_{\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})}^h (\mathbf{y} - \mathbf{x})^T. \end{aligned}$$

Por hipótesis, $H_{\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})}^h$ es definido positivo, así que $g'' > 0$, de donde

$$\text{grad}h(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})^T = g'(0) < g'(1) = \text{grad}h(\mathbf{y})(\mathbf{y} - \mathbf{x})^T,$$

por lo tanto $\text{grad}h(\mathbf{x}) \neq \text{grad}h(\mathbf{y})$. ■

Recordemos que las soluciones de (FR) son las curvas integrales del campo vectorial

$$R : (0, \infty)^N \rightarrow \mathbb{R}^N$$

definido para cada $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_N)$ como

$$R(\mathbf{r}) = (-K_1(\mathbf{r})s(r_1), -K_2(\mathbf{r})s(r_2), \dots, -K_N(\mathbf{r})s(r_N)),$$

entonces nuestra tarea consiste en hacer un cambio de coordenadas para que R se vea como el campo gradiente de una función convexa f conveniente para así poder aplicar el resultado anterior.

Si $\mathbb{G}^2 = \mathbb{E}^2$, definimos para cada $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ la función $u_i : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$u_i(r_i) = \log r_i,$$

y sea $U = \mathbb{R}^N$. Por otro lado, si $\mathbb{G}^2 = \mathbb{H}^2$, definimos $u_i : (0, \infty) \rightarrow (-\infty, 0)$ como

$$u_i(r_i) = \log \tanh\left(\frac{r_i}{2}\right),$$

y $U = (-\infty, 0)^N$. Notemos que en ambos casos

$$\frac{du_i}{dr_i} = \frac{1}{s(r_i)},$$

y u_i es un difeomorfismo de $(0, \infty)$ a su imagen; entonces, si definimos $\Psi : (0, \infty)^N \rightarrow U$ como

$$\Psi(r_1, r_2, \dots, r_N) = (u_1(r_1), u_2(r_2), \dots, u_N(r_N)), \quad (2.55)$$

se tiene que Ψ es un difeomorfismo de $(0, \infty)^N$ a U . Haciendo este cambio de coordenadas, nos interesan ahora las curvas integrales de $\bar{R} = \Psi_* R$, que está dado para cada $\mathbf{u} \in U$ por

$$\bar{R}(u_1, u_2, \dots, u_N) = D\Psi_r(R(\mathbf{r})) = (-\bar{K}_1(\mathbf{u}), -\bar{K}_2(\mathbf{u}), \dots, -\bar{K}_N(\mathbf{u})), \quad (2.56)$$

en donde $\mathbf{r} = \Psi^{-1}(\mathbf{u})$ y $\bar{K}_i = K_i \circ \Psi^{-1}$.

$$\begin{array}{ccc} (0, \infty)^N & \xleftarrow{\Psi^{-1}} & U \\ \downarrow K_i & \searrow \bar{K}_i & \\ \mathbb{R} & & \end{array}$$

Para continuar necesitamos el próximo lema.

Lema 2.19. Para cualesquiera $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ se cumple

$$\frac{\partial \bar{K}_i}{\partial u_j} = \frac{\partial \bar{K}_j}{\partial u_i}.$$

Demostración. Se tiene que

$$\frac{\partial \bar{K}_i}{\partial u_j} = \frac{\partial K_i}{\partial r_j} s(r_j)$$

por la regla de la cadena. Si $j \notin \Gamma(i)$, los ángulos $\theta_i^{r_s}$ no dependen de r_j y los ángulos $\theta_j^{r_s}$ no dependen de r_i , por lo tanto

$$\frac{\partial \bar{K}_i}{\partial u_j} = \frac{\partial K_i}{\partial r_j} s(r_j) = 0 = \frac{\partial K_j}{\partial r_i} s(r_i) = \frac{\partial \bar{K}_i}{\partial u_j}.$$

En cambio, si $j \in \Gamma(i)$, existen exactamente dos índices k y k' tales que $\Gamma(i) \cap \Gamma(j) = \{k, k'\}$. Por el Lema 2.6 tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_i}{\partial r_j} s(r_j) &= - \left(\frac{\partial \theta_i^{jk}}{\partial r_j} s(r_j) + \frac{\partial \theta_i^{jk'}}{\partial r_j} s(r_j) \right) \\ &= - \left(\frac{\partial \theta_j^{ik}}{\partial r_i} s(r_i) + \frac{\partial \theta_j^{ik'}}{\partial r_i} s(r_i) \right) \\ &= \frac{\partial K_i}{\partial r_j} s(r_j), \end{aligned}$$

como se quería. ■

Dicho en otras palabras, y usando términos que no definiremos, acabamos de probar que la 1-forma

$$\omega = \sum_{i=1}^N \bar{K}_i du_i$$

en U es cerrada. Entonces, para cualquier punto $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N) \in U$, la función

$$f(\mathbf{u}) = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{u}} \omega$$

está bien definida y su campo gradiente es $(\bar{K}_1, \bar{K}_2, \dots, \bar{K}_N)$. Ésta será la función que nos va a servir; enseguida definiremos f con todo cuidado. Consideremos un punto $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)$ en U y definamos la función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(u_1, u_2, \dots, u_N) = \int_0^1 \sum_{i=1}^N \bar{K}_i(\mathbf{a} + t(\mathbf{u} - \mathbf{a}))(u_i - a_i) dt. \quad (2.57)$$

Veremos ahora que $\text{grad}f$ es $(\bar{K}_1, \bar{K}_2, \dots, \bar{K}_N)$.

Lema 2.20. *El campo gradiente de f es $(\bar{K}_1, \bar{K}_2, \dots, \bar{K}_N)$*

Demostración. Definimos para cada $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ la función $F_i : U \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$F_i(u_1, u_2, \dots, u_N, t) = \bar{K}_i(\mathbf{a} + t(\mathbf{u} - \mathbf{a}))(u_i - a_i).$$

Tenemos entonces que

$$f(\mathbf{u}) = \int_0^1 \sum_{i=1}^N F_i(u_1, u_2, \dots, u_N, t) dt.$$

Derivando con respecto a u_j se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial u_j}(\mathbf{u}) = \int_0^1 \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial u_j}(\mathbf{u}, t) dt.$$

Calculemos ahora las derivadas parciales $\frac{\partial F_i}{\partial u_j}$; si $i \neq j$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial u_j}(\mathbf{u}, t) &= \frac{\partial \bar{K}_i}{\partial u_j}(\mathbf{a} + t(\mathbf{u} - \mathbf{a}))t(u_i - a_i) \\ &= \frac{\partial \bar{K}_j}{\partial u_i}(\mathbf{a} + t(\mathbf{u} - \mathbf{a}))t(u_i - a_i). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial F_j}{\partial u_j}(\mathbf{u}, t) = \bar{K}_j(\mathbf{a} + t(\mathbf{u} - \mathbf{a})) + \frac{\partial \bar{K}_j}{\partial u_j}(\mathbf{a} + t(\mathbf{u} - \mathbf{a}))t(u_j - a_j),$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u_j}(\mathbf{u}) &= \int_0^1 \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial u_j}(\mathbf{u}, t) dt \\ &= \int_0^1 t \sum_{i=1}^N \frac{\partial \bar{K}_j}{\partial u_i}(\mathbf{a} + t(\mathbf{u} - \mathbf{a}))t(u_i - a_i) + \bar{K}_j(\mathbf{a} + t(\mathbf{u} - \mathbf{a})) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} [t \bar{K}_j(\mathbf{a} + t(\mathbf{u} - \mathbf{a}))] dt \\ &= \bar{K}_j(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

■

Para demostrar que f es convexa emplearemos el siguiente lema de Álgebra Lineal.

Lema 2.21. Sea $H = (h_{ij})_{i,j=1}^N$ una matriz real y simétrica. Se cumple lo siguiente:

(i) Si para todo $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ se tiene que $\sum_{j \neq i} |h_{ij}| < h_{ii}$, entonces H es definida positiva.

(ii) Si para todo $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ se tiene que $0 < h_{ii}$, $h_{ik} \leq 0$ si $k \neq i$ y $\sum_{j=1}^N h_{ij} = 0$, entonces H es semidefinida positiva.

Demostración. Tenemos que probar que si H satisface las condiciones en (i), sus valores propios son positivos, y que si cumple las condiciones en (ii), sus valores propios son no negativos. Supongamos que λ es un valor propio de H y sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \neq \mathbf{0}$ un vector propio correspondiente a λ . Tomemos $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ tal que

$$|x_i| = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|\}.$$

Podemos suponer que $x_i > 0$, si no, tomamos $-\mathbf{x}$. Como $H\mathbf{x}^T = \lambda\mathbf{x}^T$, entonces $\lambda x_i = \sum_{j=1}^N h_{ij} x_j$. Si H es como en (i), se tiene

$$\begin{aligned} \lambda x_i &= \sum_{j=1}^N h_{ij} x_j \geq h_{ii} x_i - \sum_{j \neq i} |h_{ij}| \cdot |x_j| \\ &\geq h_{ii} x_i - \sum_{j \neq i} |h_{ij}| x_i \\ &= x_i \left(h_{ii} + \sum_{j \neq i} |h_{ij}| \right) > 0, \end{aligned}$$

de donde $\lambda > 0$. En cambio, si H es como en (ii), tenemos que

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^N h_{ij} x_j \geq \sum_{j=1}^N h_{ij} x_i = 0,$$

entonces $\lambda \geq 0$. ■

Proposición 2.22. Sea f la función definida en (2.57).

(i) Si $\mathbb{G}^2 = \mathbb{H}^2$, entonces f es estrictamente convexa.

(ii) Si $\mathbb{G}^2 = \mathbb{E}^2$, entonces f es convexa.

Demostración. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ tenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2} = \frac{\partial \bar{K}_i}{\partial u_i} = \frac{\partial K_i}{\partial r_i} s(r_i) = \left(\sum_{\Delta_{ijk} \in T} -\frac{\partial \theta_i^{jk}}{\partial r_i} \right) s(r_i),$$

entonces el inciso (ii) del Lema 2.3 nos asegura entonces que $\frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2} > 0$. Por otro lado, recordemos que si $j \neq i$, entonces $\frac{\partial \bar{K}_j}{\partial u_i} = 0$ si $j \notin \Gamma(i)$ y $\frac{\partial \bar{K}_j}{\partial u_i} < 0$ si $j \in \Gamma(i)$, de donde $\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} \leq 0$ si $i \neq j$. Más aún,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} &= \frac{\partial \bar{K}_i}{\partial u_i} + \sum_{j \neq i} \frac{\partial \bar{K}_j}{\partial u_i} = \frac{\partial \bar{K}_i}{\partial u_i} + \sum_{j \in \Gamma(i)} \frac{\partial \bar{K}_j}{\partial u_i} \\ &= \frac{\partial K_i}{\partial r_i} s(r_i) + \sum_{j \in \Gamma(i)} \frac{\partial K_j}{\partial r_i} s(r_i) = -s(r_i) \left(\sum_{\Delta_{ijk} \in T} \frac{\partial \theta_i^{jk}}{\partial r_i} + \sum_{j \in \Gamma(i)} \sum_{\Delta_{ijk} \in T} \frac{\partial \theta_j^{ki}}{\partial r_i} \right) \\ &= -s(r_i) \sum_{\Delta_{ijk} \in T} \frac{\partial (\theta_i^{jk} + \theta_j^{ki} + \theta_k^{ij})}{\partial r_i}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Si $\mathbb{G}^2 = \mathbb{H}^2$, el inciso (i) del Lema 2.3 implica que (2.58) es positivo, por lo tanto

$$\sum_{j \neq i} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} \right| < \frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2},$$

y concluimos por el Lema 2.21 que H_u^f es definido positivo para todo $u \in U$ y que f es estrictamente convexa. Si $\mathbb{G}^2 = \mathbb{E}^2$, de (2.58) y el inciso (i) del Lema 2.3 se sigue que

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} = 0, \quad (2.59)$$

entonces el Lema 2.21 nos garantiza que f es convexa. ■

Finalmente estamos listos para demostrar el teorema de unicidad.

Teorema 2.23. *Sea $K : (0, \infty)^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ la función que asigna a cada métrica de empaquetamiento (r_1, r_2, \dots, r_N) su vector de curvaturas (K_1, K_2, \dots, K_N) .*

(i) *Si $\mathbb{G}^2 = \mathbb{H}^2$, entonces K es inyectiva, es decir, la métrica de empaquetamiento está determinada por las curvaturas en sus vértices.*

(ii) Si $\mathbb{G}^2 = \mathbb{E}^2$, K restringida al conjunto

$$E = \{(r_1, r_2, \dots, r_N) \in (0, \infty)^N \mid r_1 r_2 \cdots r_N = 1\}$$

es inyectiva, es decir, la métrica está determinada por las curvaturas en sus vértices, salvo multiplicación por un escalar.

Demostración. Comencemos considerando el caso $\mathbb{G}^2 = \mathbb{H}^2$. Sean $\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}} \in (0, \infty)^N$ dos métricas de empaquetamiento distintas, y sean $\mathbf{u} = \Psi(\mathbf{r})$ y $\tilde{\mathbf{u}} = \Psi(\tilde{\mathbf{r}})$, en donde Ψ es la función definida en (2.55). Sabemos por la Proposición 2.22 que f es estrictamente convexa, entonces el Lema 2.18 nos asegura que

$$\text{grad}f = (\bar{K}_1, \bar{K}_2, \dots, \bar{K}_N)$$

es inyectivo, por lo tanto

$$K(\mathbf{r}) = (\bar{K}_1(\mathbf{u}), \bar{K}_2(\mathbf{u}), \dots, \bar{K}_N(\mathbf{u})) \neq (\bar{K}_1(\tilde{\mathbf{u}}), \bar{K}_2(\tilde{\mathbf{u}}), \dots, \bar{K}_N(\tilde{\mathbf{u}})) = K(\tilde{\mathbf{r}}).$$

Para el caso $\mathbb{G}^2 = \mathbb{E}^2$, hasta ahora sólo sabemos que el hessiano de f es semidefinido positivo; veremos que, además, su núcleo es de dimensión 1 y que generado por $(1, 1, \dots, 1)$. Sean $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^N$ y $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ un vector en el núcleo de H_p^f distinto de $\mathbf{0}$. Por (2.59) se tiene que las entradas de cada renglón de H_p^f suman 0, por lo que $(1, 1, \dots, 1)$ está en su núcleo. Por otro lado, elijamos $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ tal que

$$|x_i| = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|\}.$$

Podemos suponer que $x_i > 0$. Como $H_p^f \mathbf{x}^T = 0$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^N x_j \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(\mathbf{p}) = x_i \frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2}(\mathbf{p}) + \sum_{j \neq i} x_j \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(\mathbf{p}) \\ &= x_i \left(- \sum_{j \neq i} \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(\mathbf{p}) \right) + \sum_{j \neq i} x_j \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(\mathbf{p}) = \sum_{j \neq i} \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(\mathbf{p})(x_j - x_i) \\ &= \sum_{j \neq i} \frac{\partial \bar{K}_j}{\partial u_i}(x_j - x_i) = \sum_{j \in \Gamma(i)} \frac{\partial \bar{K}_j}{\partial u_i}(x_j - x_i). \end{aligned}$$

Si $j \in \Gamma(i)$, sabemos que $\frac{\partial \bar{K}_j}{\partial u_i} < 0$, además $x_j - x_i \leq 0$ por la elección de i ; se debe cumplir entonces que $x_i = x_j$ para todo $j \in \Gamma(i)$. Como la superficie S es conexa, podemos repetir varias veces este argumento para concluir que

$$x_1 = x_2 = \dots = x_N,$$

como queríamos. Usando esto probaremos que K restringida a E es inyectiva. Sean $r, \tilde{r} \in E$ dos métricas de empacamiento distintas,

$$\Psi(r) = \mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N) \quad \text{y} \quad \Psi(\tilde{r}) = \tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_N).$$

Entonces

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 + \dots + \tilde{u}_N = 0,$$

por lo tanto $\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}$ no es múltiplo de $(1, 1, \dots, 1)$ y, en consecuencia, no está en el núcleo de H_p^f para todo $p \in U$. Consideremos la función $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = f(\mathbf{u} + t(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u})).$$

Sabemos que

$$g''(t) = (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) H_{\mathbf{u} + t(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u})}^f (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u})^T,$$

por lo tanto $g''(t) > 0$ para todo $t \in [0, 1]$. De esto se deduce que

$$\text{grad}f(\mathbf{u})(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u})^T = g'(0) < g'(1) = \text{grad}f(\tilde{\mathbf{u}})(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u})^T,$$

y entonces

$$K(r) = (\bar{K}_1(\mathbf{u}), \bar{K}_2(\mathbf{u}), \dots, \bar{K}_N(\mathbf{u})) \neq (\bar{K}_1(\tilde{\mathbf{u}}), \bar{K}_2(\tilde{\mathbf{u}}), \dots, \bar{K}_N(\tilde{\mathbf{u}})) = K(\tilde{r}).$$

■

Capítulo 3

Uniformización de métricas de empaquetamiento

En este capítulo final, veremos el alcance que tiene el flujo de Ricci combinatorio al usarlo para obtener resultados puramente geométricos. Comenzaremos dando condiciones necesarias y suficientes sobre una triangulación con pesos de una superficie cerrada S , para garantizar que el flujo converge a métricas con curvatura constante en todos los vértices, de ahí el nombre del capítulo. Más específicamente, daremos respuesta a las siguientes preguntas:

- Si $\mathbb{G}^2 = \mathbb{H}^2$ y $\chi(S) < 0$, ¿bajo qué condiciones las soluciones del flujo de Ricci combinatorio convergen a la métrica de empaquetamiento con curvatura 0 en cada vértice? Cuando esto pase, podremos dar a S una métrica riemanniana hiperbólica.
- Si $\mathbb{G}^2 = \mathbb{E}^2$, ¿bajo qué condiciones las soluciones del flujo de Ricci combinatorio normalizado convergen a una métrica de empaquetamiento con curvatura K_{pr} en cada vértice? Cuando éste sea el caso y $\chi(S) = 0$, podremos de esta forma dar a S una métrica riemanniana plana.

Después, daremos equivalencias de las condiciones obtenidas en ambos casos, las cuáles nos facilitarán establecer dos interesantes corolarios para empaques tangenciales de circunferencias, es decir, cuando la función de pesos P es constante 0.

Introduciremos ahora algunos conceptos y notación que usaremos a lo largo de este capítulo. Sea S una superficie y $\Phi : \|\mathcal{K}\| \rightarrow S$ una triangulación. Para cada subconjunto no vacío I de $\{1, 2, \dots, N\}$ definimos V_I como el conjunto de vértices v_i con $i \in I$; denotaremos A_I y T_I a los conjuntos de aristas y triángulos, respectivamente, con todos sus vértices en V_I . Consideraremos además

$$S_I = V_I \cup A_I \cup T_I,$$

con la topología de subespacio de S ; notemos que entonces S_I es el poliedro de un complejo simplicial de dimensión ≤ 2 . Finalmente, definimos al conjunto

$$\text{Lk}(I) = \{(a_{jk}, v_i) \mid j, k \notin I, i \in I, \Delta_{ijk} \in T\}.$$

Unas de las herramientas clave para probar los resultados de uniformización son los Teoremas 2.14 y 2.16, que nos aseguran que basta con encerrar una curva integral del flujo en un compacto para garantizar la convergencia. Cuando esto no suceda, algunos puntos de la solución se acercarán a la frontera de $(0, \infty)^N$. La siguiente proposición nos dice qué pasa con las curvaturas en los vértices en tal caso.

Proposición 3.1. *Sea (Φ, P) una triangulación con pesos de S y sea I un subconjunto no vacío de $\{1, 2, \dots, N\}$. Supongamos que $(r_n)_{n=0}^\infty$ es una sucesión de métricas de empacamiento basadas en (Φ, P) , con geometría base $\mathbb{G}^2 \in \{\mathbb{E}^2, \mathbb{H}^2\}$, tal que*

$$r_i^\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} r_{ni}$$

es 0 cuando $i \in I$ y positivo en otro caso. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} K_i(r_n) = 2\pi \chi(S_I) - \sum_{(a,v) \in \text{Lk}(I)} (\pi - P(a)).$$

Además, si $I \neq \{1, 2, \dots, N\}$, para cualquier métrica de empacamiento r de S se cumple que

$$\sum_{i \in I} K_i(r) > 2\pi \chi(S_I) - \sum_{(a,v) \in \text{Lk}(I)} (\pi - P(a)). \quad (3.1)$$

Demostración. Recordemos que para cualquier métrica de empacamiento r y para cualquier triángulo $\Delta_{ijk} \in T$ se cumple

$$\theta_i^{jk}(r) + \theta_j^{ki}(r) + \theta_k^{ij}(r) = \pi - \chi \text{Área}(\Delta_{ijk}(r)), \quad (3.2)$$

en donde χ es la curvatura de \mathbb{G}^2 . Podemos escribir la suma que nos interesa como

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} K_i(r) &= \sum_{i \in I} \left[2\pi - \sum_{\Delta_{ijk} \in T} \theta_i^{jk}(r) \right] \\ &= 2\pi |I| - \sum_{i \in I} \sum_{\Delta_{ijk} \in T} \theta_i^{jk}(r). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Consideremos los siguientes conjuntos de triángulos:

$$T_1 := \{\Delta_{ijk} \in T \mid \{i, j, k\} \cap I = \{i\}\},$$

$$T_2 := \{\Delta_{ijk} \in T \mid \{i, j, k\} \cap I = \{i, j\}\},$$

$$T_3 := \{\Delta_{ijk} \in T \mid \{i, j, k\} \subset I\}.$$

Tenemos entonces la siguiente igualdad

$$\sum_{i \in I} \sum_{\Delta_{ijk} \in T} \theta_i^{jk}(\mathbf{r}) = \sum_{\Delta_{ijk} \in T_3} (\theta_i^{jk}(\mathbf{r}) + \theta_j^{ki}(\mathbf{r}) + \theta_k^{ij}(\mathbf{r})) + \sum_{\Delta_{ijk} \in T_2} (\theta_i^{jk}(\mathbf{r}) + \theta_j^{ki}(\mathbf{r})) + \sum_{\Delta_{ijk} \in T_1} \theta_i^{jk}(\mathbf{r}).$$

Analizaremos cómo se comportan estos últimos tres sumandos al evaluar en \mathbf{r}_n y haciendo tender n a ∞ . Si $\Delta_{ijk} \in T_3$, entonces $r_i^\infty = r_j^\infty = r_k^\infty = 0$, por lo que $\text{Área}(\Delta_{ijk}(\mathbf{r}_n)) \rightarrow 0$. Por (3.2) podemos concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\theta_i^{jk}(\mathbf{r}_n) + \theta_j^{ki}(\mathbf{r}_n) + \theta_k^{ij}(\mathbf{r}_n)) = \pi. \quad (3.4)$$

Por otro lado, si $\Delta_{ijk} \in T_2$, entonces $r_i^\infty = r_j^\infty = 0$ y $r_k^\infty > 0$, de donde la longitud de la arista a_{ij} tiende a 0 y las longitudes de a_{jk} y a_{ki} tienden a r_k^∞ . Tenemos entonces que tanto $\theta_k^{ij}(\mathbf{r}_n)$ como $\text{Área}(\Delta_{ijk}(\mathbf{r}_n))$ convergen a 0, así que por (3.2) se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\theta_i^{jk}(\mathbf{r}_n) + \theta_j^{ki}(\mathbf{r}_n)) = \pi. \quad (3.5)$$

Finalmente, si $\Delta_{ijk} \in T_1$, entonces $r_i^\infty = 0$ y r_j^∞, r_k^∞ son positivos, así que en el límite, el triángulo Δ_{ijk} realiza a un triángulo en \mathbb{G}^2 cuyos vértices son los centros de dos circunferencias con radios r_j^∞ y r_k^∞ , respectivamente, que se cortan con ángulo $P(a_{jk})$, y uno de los puntos de intersección de estas circunferencias. Se tiene entonces que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_i^{jk}(\mathbf{r}_n) = \pi - P(a_{jk}). \quad (3.6)$$

Por otra parte, observemos que cada arista en S_I está en exactamente dos triángulos de S , cada uno de los cuales pertenece a T_2 o a T_3 ; además, cada triángulo en T_2 tiene exactamente una arista en A_I y cada triángulo en T_3 tiene sus tres aristas en A_I , por lo tanto $3|T_3| + |T_2| = 2|A_I|$. Como $T_3 = T_I$, tenemos entonces $|T_3| + |T_2| = 2(|A_I| - |T_I|)$. En resumen, al evaluar (3.3) en \mathbf{r}_n y tomar el límite cuando $n \rightarrow \infty$, por (3.4), (3.5) y (3.6) obtenemos lo que buscábamos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} K_i(\mathbf{r}_n) &= 2\pi|I| - \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{\Delta_{ijk} \in T_3} (\theta_i^{jk}(\mathbf{r}_n) + \theta_j^{ki}(\mathbf{r}_n) + \theta_k^{ij}(\mathbf{r}_n)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\Delta_{ijk} \in T_2} (\theta_i^{jk}(\mathbf{r}_n) + \theta_j^{ki}(\mathbf{r}_n)) + \sum_{\Delta_{ijk} \in T_1} \theta_i^{jk}(\mathbf{r}_n) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi|I| - \left(\pi(|T_3| + |T_2|) + \sum_{(a,v) \in \text{Lk}(I)} (\pi - P(a)) \right) \\
&= 2\pi(|I| - |A_I| + |T_I|) - \sum_{(a,v) \in \text{Lk}(I)} (\pi - P(a)) \\
&= 2\pi\chi(S_I) - \sum_{(a,v) \in \text{Lk}(I)} (\pi - P(a)). \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Sea r una métrica de empacamiento de S cualquiera. Notemos que por (3.2) se tiene que si $\Delta_{ijk} \in T_3$, entonces $\theta_i^{jk}(r) + \theta_j^{ki}(r) + \theta_k^{ij}(r) \leq \pi$, y si $\Delta_{ijk} \in T_2$, entonces $\theta_i^{jk}(r) + \theta_j^{ki}(r) < \pi$. Supongamos ahora que $\Delta_{ijk} \in T_1$. Por el inciso (iii) del Lema 2.3, sabemos que si fijamos a r_j y r_k , entonces θ_i^{jk} es decreciente como función de r_i , y como la igualdad $\theta_i^{jk} = \pi - P(a_{jk})$ se alcanza en el caso degenerado $r_i = 0$, se sigue que $\theta_i^{jk}(r) < \pi - P(a_{jk})$. Si I está contenido propiamente en $\{1, 2, \dots, N\}$, el conjunto T_2 debe ser no vacío. Con base en esto y (3.7), podemos concluir que (3.1) se cumple, como queríamos. ■

3.1. Uniformización con geometría hiperbólica

En esta subsección daremos condiciones necesarias y suficientes sobre una triangulación con pesos de una superficie cerrada S , con $\chi(S) < 0$, para garantizar la convergencia de las soluciones del flujo de Ricci combinatorio. Comenzaremos probando algunos lemas que facilitarán la demostración del resultado principal.

Lema 3.2. *Si $r(t)$ es una solución de (FR) con geometría base \mathbb{H}^2 , existe una constante $C > 0$ tal que $r_i(t) \leq C$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ y para todo $t \geq 0$.*

Demostración. El resultado se sigue del Lema 2.13, porque si existieran $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ y una sucesión $(t_n)_{n=0}^\infty \subset [0, \infty)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_i(t_n) = \infty$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} K_i(r(t_n)) = 2\pi$, lo cual no es posible por la Proposición 2.9. ■

Lema 3.3. *Sea $r(t)$ una solución de (FR) con geometría base \mathbb{H}^2 . Si la imagen de r no está contenida en ningún compacto $K \subset (0, \infty)^N$, existe una sucesión de reales positivos $(t_n)_{n=0}^\infty$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$, la sucesión $(r(t_n))_{n=0}^\infty$ es convergente y el conjunto*

$$I = \left\{ i \mid \lim_{n \rightarrow \infty} r_i(t_n) = 0 \right\}$$

es no vacío.

Demostración. Sea $C > 0$ como en el Lema 3.2. Tenemos entonces que $r[[0, \infty)) \subset [0, C]^N$, lo que implica que toda sucesión contenida en $r[[0, \infty))$ tiene una subsucesión convergente.

Como $r[[0, \infty))$ no está contenido en ningún compacto $K \subset (0, \infty)^N$, debe existir un índice i tal que

$$\inf\{r_i(t) \mid t \in [0, \infty)\} = 0.$$

Ahora vamos a construir inductivamente una sucesión $(s_n)_{n=0}^\infty \subset [0, \infty)$ tal que para todo $n \geq 0$ se cumpla que $s_n + 1 \leq s_{n+1}$ y $r_i(s_{n+1}) \leq \frac{1}{2}r_i(s_n)$. Podemos tomar $s_0 = 0$. Supongamos que ya tenemos los primeros n términos de la sucesión. Como r_i alcanza su mínimo $c_i > 0$ en el compacto $[0, s_n + 1]$, debe existir un número s_{n+1} con las propiedades requeridas, de lo contrario $\min\{c_i, \frac{1}{2}r_i(s_n)\}$ sería cota inferior de $r_i(t)$, lo cual no es posible. Podemos ahora tomar una subsucesión convergente $(r(s_{n_k}))_{k=0}^\infty$ de $(r(s_n))_{n=0}^\infty$, y entonces $(s_{n_k})_{k=0}^\infty$ cumple las propiedades requeridas porque $r_i(s_{n_k}) \rightarrow 0$. Tomamos $t_k = s_{n_k}$. ■

Teorema 3.4. *Sean S es una superficie cerrada con característica de Euler negativa, y (Φ, P) una triangulación de S con pesos. Entonces toda solución $r(t)$ del flujo de Ricci con geometría base \mathbb{H}^2 converge a una métrica de empaquetamiento con curvatura 0 en cada vértice si y sólo si, para todo subconjunto propio no vacío I de $\{1, 2, \dots, N\}$ se cumple*

$$2\pi\chi(S_I) - \sum_{(a,v) \in \text{Lk}(I)} (\pi - P(a)) < 0. \quad (3.8)$$

Demostración. Por el Teorema 2.23, sabemos que si existe una métrica de empaquetamiento con curvatura 0 en cada vértice, ésta es única. Si tal métrica existe, la denotaremos r_0 . Comencemos suponiendo que toda solución de (FR) converge a r_0 ; en particular, r_0 existe. Si $I \subsetneq \{1, 2, \dots, N\}$ es no vacío, aplicando la Proposición 3.1 con r_0 se deduce que se cumple (3.8).

Supongamos ahora que (3.8) es válida para todo $I \subsetneq \{1, 2, \dots, N\}$ no vacío. Para empezar, probaremos que r_0 existe. Por el Lema 2.13, podemos elegir una métrica de empaquetamiento r_1 con radios suficientemente grandes de manera tal que $K_i(r_1)$ esté muy cercana a 2π , para cada $i \in \{1, 2, \dots, N\}$; en particular tenemos $K_i(r_1) > 0$. Sea $r_1(t)$ la solución de (FR) con condición inicial r_1 . Por la Proposición 2.9 (principio del máximo) se tiene que $K_i(r_1(t)) > 0$ para todo $t \geq 0$. Por el Teorema 2.14, si probamos que $r[[0, \infty))$ está contenido en un compacto $K \subset (0, \infty)^N$, habremos terminado. Si éste no fuera el caso, podemos considerar la sucesión $(t_n)_{n=0}^\infty \subset [0, \infty)$ e $I \subset \{1, 2, \dots, N\}$ como en el Lema 3.3. Como $\sum_{i \in I} K_i(r_1(t_n)) > 0$ para toda $n \geq 0$, por la Proposición 3.1 se tiene

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} K_i(r_1(t_n)) = 2\pi\chi(S_I) - \sum_{(a,v) \in \text{Lk}(I)} (\pi - P(a)),$$

lo cual no es posible. Ahora probaremos la convergencia de una solución cualquiera $r(t)$ de (FR). Vamos a considerar el cambio de coordenadas $\Psi : (0, \infty)^N \rightarrow U$ definido en (2.55). Si f es la función que introducimos en (2.57) y $\alpha = \Psi \circ r$, por (2.56) y el Lema 2.20, sabemos que

α es curva integral de $-\text{grad}f$. El punto $\mathbf{u}_0 = \Psi(\mathbf{r}_0)$ es punto crítico de f , y como veremos a continuación, es el único mínimo global de f . Para probar esto, tomemos $\mathbf{u} \in U \setminus \{\mathbf{u}_0\}$ y sea $g(t) = f(\mathbf{u}_0 + t(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0))$. Como f es estrictamente convexa, entonces

$$0 < (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) H_{\mathbf{u}_0 + t(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)}^f (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)^T = g''(t)$$

para todo t en donde g esté definida, por lo que g' es creciente. Entonces, si $0 < t < 1$, tenemos

$$0 = \text{grad}f(\mathbf{u}_0) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) = g'(0) < g'(t),$$

de donde se sigue que g es creciente en $[0, 1]$, y por lo tanto $f(\mathbf{u}_0) = g(0) < g(1) = f(\mathbf{u})$.

Ahora observemos que como α es curva integral de $-\text{grad}f$, por la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{df \circ \alpha}{dt}(t) = -\|\text{grad}f(\alpha(t))\|^2 \leq 0, \quad (3.9)$$

así que $f \circ \alpha$ es decreciente; sabemos además que esta función está acotada inferiormente por $f(\mathbf{u}_0)$, por lo tanto $f \circ \alpha(t)$ converge cuando $t \rightarrow \infty$. Podemos entonces garantizar que la integral

$$\int_0^\infty \|\text{grad}f(\alpha(t))\|^2 dt$$

converge, ya que si integramos de 0 a t en (3.9) se obtiene

$$f \circ \alpha(0) - f \circ \alpha(t) = \int_0^t \|\text{grad}f(\alpha(t))\|^2 dt.$$

Este hecho nos permite construir una sucesión $(t_n)_{n=0}^\infty \subset [0, \infty)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{grad}f(\alpha(t_n)) = \mathbf{0}.$$

Se sigue que $(\mathbf{r}(t_n))_{n=0}^\infty$ es una sucesión de métricas de empacamiento de S tales que $K_i(\mathbf{r}(t_n)) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Podemos concluir por el Lema 2.9 (principio del máximo) que para toda $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ se cumple

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K_i(t) = 0,$$

así que del Lema 3.3 y la Proposición 3.1 se sigue que $\mathbf{r}[[0, \infty)]$ está contenida en un compacto $K \subset (0, \infty)^N$. Finalmente, el Teorema 2.14 nos garantiza que $\mathbf{r}(t)$ converge a \mathbf{r}_0 . ■

3.2. Uniformización con geometría euclidea

Si consideramos métricas de empaçamento r con geometría base \mathbb{E}^2 , por la Proposición 2.2 sabemos que $K_1(r) + K_2(r) + \cdots + K_N(r) = 2\pi\chi(S)$, y de la Proposición 3.1 se sigue que $(K_1(r), \dots, K_N(r))$ está en el conjunto

$$H_I = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_N > 2\pi\chi(S_I) - \sum_{(a,v) \in Lk(I)} (\pi - P(a)) \right\},$$

para cada $I \subsetneq \{1, 2, \dots, N\}$. Entonces, todos los vectores de curvatura pertenecen al conjunto

$$\mathcal{P} = (\cap \{H_I \mid \emptyset \subsetneq I \subsetneq \{1, 2, \dots, N\}\}) \cap \{(x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_N = 2\pi\chi(S)\}.$$

Como veremos ahora, también todo punto de \mathcal{P} es de la forma $(K_1(r), \dots, K_N(r))$, para alguna métrica de empaçamento r . Consideraremos a K como la función definida en el Teorema 2.23. Para un espacio topológico X y un subconjunto $A \subset X$, denotaremos $cl_X(A)$ y $Fr_X(A)$ a la cerradura y la frontera de A en X , respectivamente.

Proposición 3.5. *La función $K : (0, \infty)^N \rightarrow \mathcal{P}$ es sobre.*

Demostración. Sea

$$H = \{(r_1, r_2, \dots, r_N) \in (0, \infty)^N \mid r_1 + r_2 + \cdots + r_N = 1\}.$$

Como $K(r) = K(\lambda r)$ para cualquier métrica de empaçamento r y cualquier $\lambda > 0$, entonces $K[H] = K[(0, \infty)^N]$. Como \mathcal{P} es conexo, para probar que $K[H] = \mathcal{P}$, bastará con probar que $K[H]$ es abierto y cerrado en \mathcal{P} . Tanto H como \mathcal{P} son homeomorfos a abiertos de \mathbb{R}^{N-1} , y sabemos por el Teorema 2.23 que K restringida a H es inyectiva y continua, así que por el teorema de invariancia del dominio (ver [HA, pág. 172, Teo. 2B.3]) se tiene que $K[H]$ es abierto en \mathcal{P} . Por otro lado, sean p un punto en $cl_{\mathcal{P}}(K[H])$ y $(r_n)_{n=0}^\infty \subset (0, \infty)^N$ una sucesión tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K(r_n) = p.$$

Como $cl_{\mathbb{R}^N}(H)$ es compacto, existe una subsucesión $(r_{n_k})_{k=0}^\infty$ de $(r_n)_{n=0}^\infty$ que converge a un punto q . Notemos que q no puede estar en $Fr_{\mathbb{R}^N}(H)$, ya que de ser así, por la Proposición 3.1 se tendría que p está en $Fr_{\mathbb{R}^N}(\mathcal{P})$, lo cual es falso. Entonces q está en H y $K(q) = p$, de donde $p \in K[H]$. Concluimos entonces que $K[H]$ también es cerrado en \mathcal{P} y por lo tanto $K[H] = \mathcal{P}$. ■

Teorema 3.6. *Sean S una superficie cerrada y (Φ, P) una triangulación de S con pesos. Entonces toda solución $r(t)$ del flujo de Ricci normalizado con geometría base \mathbb{E}^2 converge a una métrica de empaçamento con curvatura K_{pr} en cada vértice si y sólo si, para todo subconjunto propio no vacío I de $\{1, 2, \dots, N\}$ se cumple*

$$2\pi\chi(S_I) - \sum_{(a,v) \in Lk(I)} (\pi - P(a)) < |I|K_{pr}. \quad (3.10)$$

Demostración. Recordemos que si $\mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), \dots, r_N(t))$ es una solución del flujo de Ricci normalizado, entonces $r_1(t)r_2(t)\cdots r_N(t)$ es constante por (2.4). Para cada $\lambda > 0$, sea

$$E_\lambda = \{(r_1, r_2, \dots, r_N) \in (0, \infty)^N \mid r_1 r_2 \cdots r_N = \lambda\}.$$

Por la Proposición 3.5 sabemos que existe una métrica de empacamiento con curvatura K_{pr} en cada vértice si y sólo si (3.10) se cumple para todo $I \subsetneq \{1, 2, \dots, N\}$ no vacío. De ser así, por el Teorema 2.23, en cada E_λ existe una única métrica de empacamiento con curvatura K_{pr} en todos los vértices, que denotaremos \mathbf{r}_λ . Entonces la suficiencia queda demostrada. Supongamos ahora que (3.10) es cierta para todo I como en el enunciado. Consideremos el cambio de coordenadas $\Psi : (0, \infty)^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ definido en (2.55). Entonces $\Psi[E_\lambda]$ es un hiperplano en \mathbb{R}^N con vector normal $(1, 1, \dots, 1)$. Sean $\mathbf{u}_\lambda = \Psi(\mathbf{r}_\lambda)$ y $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida en (2.57). Sea $h : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ la función

$$h(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) + K_{pr}(u_1 + u_2 + \cdots + u_N),$$

para cada $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$. Entonces $\text{grad}h = (\bar{K}_1 - K_{pr}, \bar{K}_2 - K_{pr}, \dots, \bar{K}_N - K_{pr})$ por el Lema 2.20 y $H_u^h = H_u^f$ para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$. El punto \mathbf{u}_λ es punto crítico de h y, como veremos ahora, es mínimo global si nos restringimos a $\Psi[E_\lambda]$. Sean $\mathbf{u} \in \Psi[E_\lambda] \setminus \{\mathbf{u}_\lambda\}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$g(t) = h(\mathbf{u}_\lambda + t(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\lambda)).$$

Bastará con probar que $g'(t) > 0$ para todo $t > 0$. Como \mathbf{u} y \mathbf{u}_λ están en $\Psi[E_\lambda]$, entonces $\mathbf{u} - \mathbf{u}_\lambda$ no es múltiplo de $(1, 1, \dots, 1)$, por lo tanto

$$g''(t) = (\mathbf{u} - \mathbf{u}_\lambda) H_{\mathbf{u}_\lambda + t(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\lambda)}^f (\mathbf{u} - \mathbf{u}_\lambda)^T > 0,$$

de donde, si $t > 0$, tenemos

$$g'(t) > g'(0) = \text{grad}h(\mathbf{u}_\lambda)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\lambda)^T = 0,$$

como se quería. Por otra parte, la curva $\alpha = \Psi \circ \mathbf{r}$ es curva integral de $-\text{grad}(h)$ y $h \circ \alpha$ es decreciente porque

$$\frac{dh \circ \alpha}{dt}(t) = -\|\text{grad}h(\alpha(t))\|^2 \leq 0;$$

como además $h \circ \alpha$ está acotada inferiormente por $h(\mathbf{u}_\lambda)$, entonces $h \circ \alpha(t)$ converge cuando $t \rightarrow \infty$. Esto implica que la integral

$$\int_0^\infty \|\text{grad}h(\alpha(t))\|^2 dt$$

converge, lo que a su vez implica que existe una sucesión creciente $(t_n)_{n=0}^\infty \subset [0, \infty)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{grad}h(\alpha(t_n)) = 0.$$

Entonces $K_i(\mathbf{r}(t_n)) \rightarrow K_{pr}$, así que, por la Proposición 2.9, para todo $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K_i(\mathbf{r}(t)) = K_{pr}. \quad (3.11)$$

Para concluir usaremos el Teorema 2.16. Sea $\beta(t)$ la curva que se obtiene al proyectar $\mathbf{r}(t)$ desde el origen, sobre H . Si $\mathbf{r}[[0, \infty)]$ no se queda contenido en ningún compacto $K \subset (0, \infty)^N$, lo mismo es cierto para $\beta[[0, \infty)]$. Entonces existe una sucesión creciente $(s_n)_{n=0}^\infty \subset [0, \infty)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta(s_n) = \mathbf{r}_0,$$

para algún $\mathbf{r}_0 \in \text{Fr}_{\mathbb{R}^N}(H)$. Sea $I \subset \{1, 2, \dots, N\}$ el conjunto de coordenadas que son 0 en \mathbf{r}_0 . Como $K_i(\beta(s_n)) = K_i(\mathbf{r}(s_n))$ para todo $n \geq 0$, por la Proposición 3.1 y (3.11), se tiene que I no satisface (3.10), lo cual es una contradicción. ■

3.3. Una versión más geométrica

Recordemos que para obtener una métrica riemanniana con curvatura constante en S a partir de una métrica de empacamiento de círculos, necesitamos que la curvatura en cada vértice de la triangulación sea 0. Para lograr esto, podemos usar el Teorema 3.4 si $\chi(S) < 0$, dando así a S una métrica hiperbólica; por otra parte, si $\chi(S) = 0$, es decir, si S es un toro o una botella de Klein, podemos usar el Teorema 3.6 para darle a S una métrica plana. Observemos que en ambos casos, las condiciones (3.8) y (3.10) coinciden. En esta sección estableceremos una equivalencia, con una formulación más geométrica, de estas condiciones:

Para cualesquiera tres aristas a_{jk}, a_{kl}, a_{lj} que formen la frontera de un disco en S , si $P(a_{jk}) + P(a_{kl}) + P(a_{lj}) > \pi$, entonces $\Delta_{jkl} \in T$.

Comenzaremos probando unos lemas que facilitarán la demostración de esta equivalencia. Haremos algunas convenciones: I denotará siempre a un subconjunto no vacío de $\{1, 2, \dots, N\}$, I^C será el complemento de I en $\{1, 2, \dots, N\}$, L será la cardinalidad de $\text{Lk}(I)$, denotaremos d_i al grado de cada vértice $v_i \in V$ y finalmente, para todo $I \subset \{1, 2, \dots, N\}$ no vacío, denotamos $d_i^I = |\Gamma(i) \cap I|$. Siempre que etiquetemos $v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_r}$ a los vértices adyacentes a v_i , lo haremos de tal forma que $\Delta_{i_i, i_{s+1}} \in T$ para todo $0 \leq s \leq r$, considerando $i_{r+1} = i_0$.

Lema 3.7. *Si $(a_{jk}, v_i) \in \text{Lk}(I)$, entonces existen índices $i', k' \in \{1, 2, \dots, N\}$ tales que $(a_{jk'}, v_{i'}) \in \text{Lk}(I)$ y $(a_{jk'}, v_{i'}) \neq (a_{jk}, v_i)$.*

Demostración. Sean $v_{j_0}, v_{j_1}, \dots, v_{j_r}$ los vértices adyacentes a v_j con $v_{j_0} = v_k$ y $v_{j_1} = v_i$. Si m es el menor entero positivo tal que $j_m \notin I$, entonces $(a_{j_m}, v_{j_{m-1}})$ está en $\text{Lk}(I)$ y es distinto de (a_{jk}, v_i) . ■

Lema 3.8. Si $L = 0$, entonces para todo $j \in I^C$ se tiene que $\Gamma(j) \subset I$.

Demostración. Haremos la prueba por contrapuesta. Supongamos que existe $j \in I^C$ tal que $\Gamma(j) \not\subset I$. Como S es conexa, podemos elegir tal j de manera que $\Gamma(j) \cap I \neq \emptyset$. Sean $v_{j_0}, v_{j_1}, \dots, v_{j_r}$ los vértices adyacentes a v_j con $j_0 \in I$. Si m es el menor entero positivo tal que $j_m \notin I$, entonces $(a_{j_{j_m}}, v_{j_{m-1}}) \in \text{Lk}(I)$, por lo tanto $L > 0$. ■

Lema 3.9. Si $L = 2$, entonces S_{I^C} consta de una arista y tal vez algunos puntos aislados.

Demostración. Tomemos $(a_{jk}, v_i) \in \text{Lk}(I)$. Por el Lema 3.7, existen $i_1, i_2, j, k \in \{1, 2, \dots, N\}$ tales que $(a_{jk'}, v_{i_1})$ y $(a_{j'k}, v_{i_2})$ están en $\text{Lk}(I)$ y son distintos de (a_{jk}, v_i) . Como $L = 2$, tenemos

$$(a_{jk'}, v_{i_1}) = (a_{j'k}, v_{i_2}),$$

de donde $j = j', k = k'$ e $i_1 = i_2$. Entonces i_1 es el único índice distinto de i tal que $\Delta_{i_1jk} \in T$. Como $L = 2$, cualquier otra componente conexa de S_{I^C} debe ser un punto. ■

Lema 3.10. Si $L = 3$, entonces

$$\{a \mid (a, v) \in \text{Lk}(I)\} = \{a_{jk}, a_{kl}, a_{lj}\}$$

para algunos $j, k, l \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Demostración. Sean $D = \{a \mid (a, v) \in \text{Lk}(I)\}$ y G el subespacio de S formado por las aristas en D . Por el Lema 3.7, cada componente conexa de G aporta al menos 2 a L ; como $L = 3$, entonces G debe ser conexo. Supongamos que (a_{jk}, v_i) y $(a_{kl}, v_{i'})$ están en $\text{Lk}(I)$. Por el Lema 3.7, existen $k_1, k_2, i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, N\}$ tales que (a_{jk_1}, v_{i_1}) y (a_{k_2l}, v_{i_2}) están en $\text{Lk}(I)$ y son distintos de (a_{jk}, v_i) y $(a_{kl}, v_{i'})$, respectivamente. Como $L = 3$, se sigue que

$$(a_{jk_1}, v_{i_1}) = (a_{k_2l}, v_{i_2}),$$

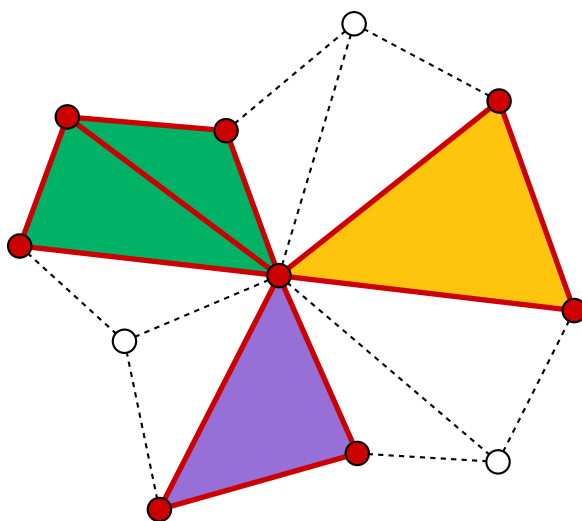
por lo tanto $j = k_2$ y $l = k_1$, y entonces $a_{lj} \in D$. Como $|D| \leq L = 3$, se sigue el resultado. ■

Lema 3.11. Si S_I es conexo, se tiene que $\chi(S_I) \leq 1$; además, si la igualdad se da, entonces S_I es contraíble.

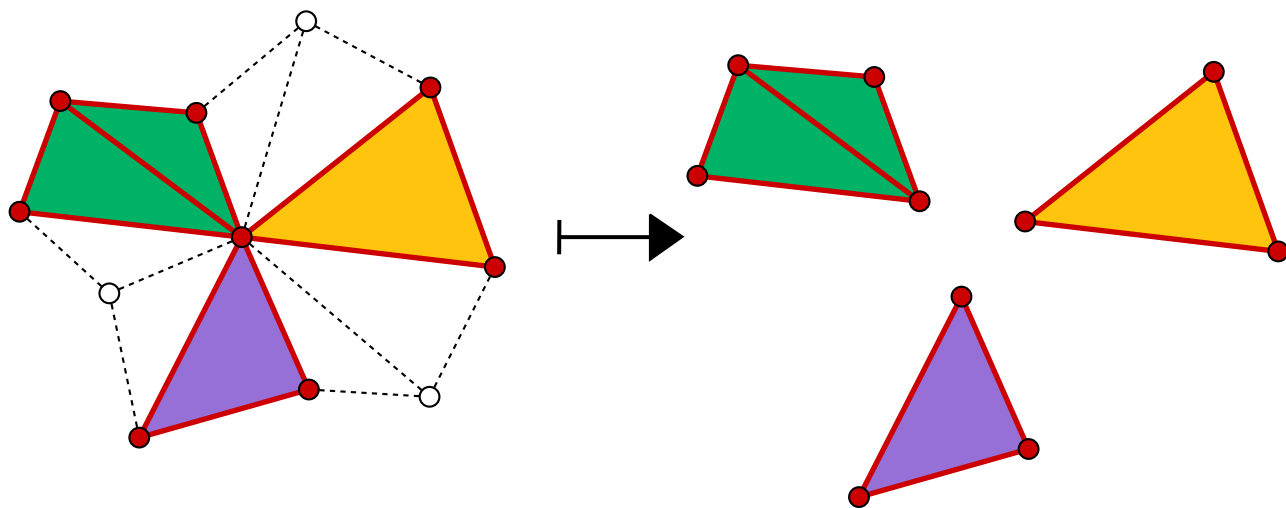
Demostración. Definimos en T_I la relación de equivalencia \sim como sigue: $\Delta \sim \Delta'$ si y sólo si $\Delta = \Delta'$, o si existe una sucesión de triángulos en T_I

$$\Delta = \Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_k = \Delta',$$

tal que Δ_i y Δ_{i+1} comparten una arista. Sean T_1, T_2, \dots, T_s las clases de equivalencia de \sim y $B_i = \cup T_i$ para cada $1 \leq i \leq s$. Observemos que cada B_i es una superficie cerrada con frontera, salvo los vértices $v \in B_i \cap V_I$ en los que se pegan algunos triángulos de T_I dejando huecos como en la siguiente figura:



Llamemos a un vértice v así *punto irregular* de B_i . Si B_i tiene puntos irregulares, consideramos a la superficie cerrada D_i que se obtiene de B_i , separando los bloques de triángulos que se pegan en un punto irregular, como en la figura.



Si B_i no tiene puntos irregulares, consideramos $D_i = B_i$. Observemos que

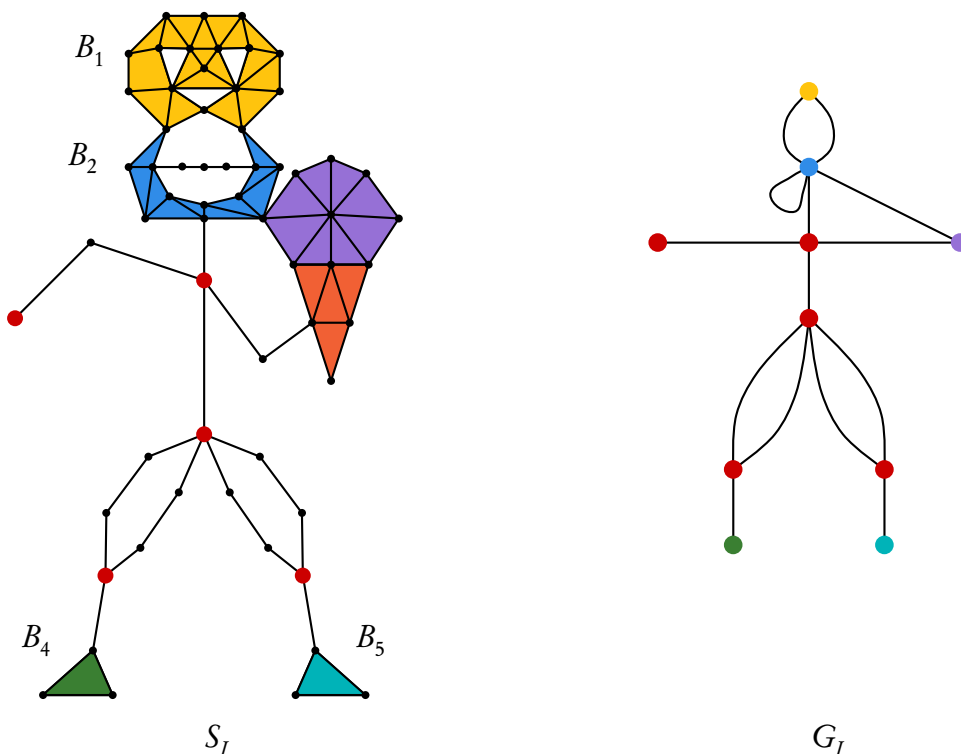
$$\chi(B_i) \leq \chi(D_i), \quad (3.12)$$

ya que podemos pensar que al contar los vértices de D_i , estamos contando algunos repetidos (precisamente los puntos irregulares); además, la igualdad se da si y sólo si B_i no tiene puntos

irregulares, es decir, si $D_i = B_i$. Por otra parte, pueden haber vértices $v_i \in V_I$ que no pertenezcan a ningún B_j ; a un v_i como estos le llamaremos *vértice de ramificación* si $|\Gamma(i) \cap I| \neq 2$, y le llamaremos *vértice par* si $|\Gamma(i) \cap I| = 2$. Denotaremos R_I al conjunto de vértices de ramificación. Ahora, definiremos el concepto de *unión* entre elementos de $X = \{B_1, \dots, B_s\} \cup R_I$. Consideremos una sucesión de vértices en V_I

$$v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_k}, \quad (3.13)$$

con $k \geq 1$, tal que $i_{l-1} \in \Gamma(i_l)$ para todo $0 \leq l \leq k-1$ y tal que v_{i_l} es vértice par para $1 \leq l \leq k-1$. Si v es vértice de ramificación y $x \in X$, una unión entre v y x es una sucesión como (3.13), tal que $v_{i_0} = v$ y $v_{i_k} = x$ si $x \in R_I$, o $v_{i_k} \in x$ si $x \notin R_I$. Si $B_i \neq B_j$, una unión entre B_i y B_j es una sucesión como (3.13), tal que $v_{i_0} \in B_i$ y $v_{i_k} \in B_j$, o bien, un vértice en $B_i \cap B_j$. Finalmente, una unión de B_i en si mismo es una sucesión como (3.13), tal que $v_{i_0}, v_{i_k} \in B_i$. Si una unión entre dos elementos de X está dada por una sucesión como (3.13), no haremos distinción entre ésta y la unión dada por la misma sucesión, etiquetando los elementos al revés. Consideremos la gráfica G_I que tiene a X como conjunto de vértices, y una arista por cada unión entre elementos de X (permitimos que dos vértices estén unidos por más de una arista). En la figura siguiente ilustramos cómo se construye G_I con un ejemplo.



Denotemos α a la cantidad de aristas de G_I . Como S_I es conexa, entonces G_I también, por lo tanto $\alpha \geq |X| - 1 = s + |R_I| - 1$, y la igualdad se da si y sólo si G_I es un árbol. Entonces, por el corolario 1.11 se tiene

$$\chi(S_I) = |R_I| + \sum_{i=1}^s \chi(B_i) - \alpha \leq |R_I| + \sum_{i=1}^s \chi(D_i) - (|R_I| + s - 1) \leq 1,$$

y la igualdad se da si y sólo si, para todo $1 \leq i \leq s$, el subespacio B_i no tiene puntos irregulares y, por el corolario 1.12, es un disco, y G_I es un árbol. En tal caso, es claro que S_I es contraíble. ■

Proposición 3.12. Sean S una superficie cerrada con característica de Euler menor que 1 y (Φ, P) una triangulación con pesos de S . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Para todo subconjunto propio no vacío I de $\{1, 2, \dots, N\}$ se cumple

$$2\pi\chi(S_I) - \sum_{(a,v) \in Lk(I)} (\pi - P(a)) < 0. \quad (3.14)$$

(ii) Para cualesquiera tres aristas a_{jk}, a_{kl}, a_{lj} que formen la frontera de un disco en S , si $P(a_{jk}) + P(a_{kl}) + P(a_{lj}) > \pi$, entonces $\Delta_{jkl} \in T$.

Demostración. Probaremos primero (i) \Rightarrow (ii) por contrapuesta. Supongamos que a_{jk}, a_{kl} y a_{lj} son aristas que satisfacen las condiciones de (ii), pero que $\Delta_{jkl} \notin T$. El lazo que forman estas tres aristas es la frontera de un disco $D \subset S$. Sean $I \subset \{1, 2, \dots, N\}$ tal que V_I es el conjunto de vértices en el interior de D e $I' = I \cup \{j, k, l\}$. Como $S_{I'} = D$, entonces $\chi(S_{I'}) = 1$. Al remover de $S_{I'}$ a v_j, v_k, v_l y todas sus aristas y triángulos, se tiene

$$|V_I| = |V_{I'}| - 3, \quad |A_I| = |A_{I'}| - d_j^I - d_k^I - d_l^I + 3, \quad \text{y} \quad |T_I| = |T_{I'}| - d_j^I - d_k^I - d_l^I.$$

Por lo tanto $\chi(S_I) = \chi(S_{I'}) = 1$, y entonces

$$2\pi\chi(S_I) - \sum_{(a,v) \in Lk(I)} (\pi - P(a)) = P(a_{jk}) + P(a_{kl}) + P(a_{lj}) - \pi \geq 0.$$

Ahora probaremos (ii) \Rightarrow (i). Para empezar, consideremos I tal que S_I sea conexo. Por el Lema 3.11 se tiene que $\chi(S_I) \leq 1$ y como $\frac{\pi}{2} < \pi - P(a)$ para cualquier arista a , entonces (3.14) se cumple si $L \geq 4$. Además, por el Lema 3.7 sabemos que si $L > 0$, entonces $L \geq 2$. Esto nos deja con tres casos: $L = 0, L = 2$ y $L = 3$.

Caso 1. $L = 0$

Sea $j \in I^C$. Al remover de S a v_j con todas sus aristas y triángulos, estamos quitando

la misma cantidad de aristas que de triángulos, por lo tanto, si $J = \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{j\}$, entonces $\chi(S_J) = \chi(S) - 1$. De esta observación y del Lema 3.8 se sigue que

$$\chi(S_I) = \chi(S) - |I^c| < 0,$$

por lo tanto (3.14) se cumple.

Caso 2. $L = 2$

Por el Lema 3.9, en S_{I^c} hay una sola arista a_{jk} . Al remover de S a v_j, v_k y todas sus aristas y vértices, los vértices disminuyen en 2, las aristas en $d_j + d_k - 1$ y los triángulos en $d_j + d_k - 2$, por lo tanto $\chi(S_J) = \chi(S) - 1$, en donde $J = \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{j, k\}$. Así que concluimos que si hay k puntos aislados en S_{I^c} , entonces

$$\chi(S_I) = \chi(S) - k - 1 < 0,$$

y por lo tanto (3.14) es válida.

Caso 3. $L = 3$

Sean $j, k, l \in \{1, 2, \dots, N\}$ como en el Lema 3.10. Denotemos \mathcal{L} al lazo formado por a_{jk}, a_{kl} y a_{lj} . Por el Lema 3.11 se tiene que $\chi(S_I) \leq 1$, entonces la única manera de que (3.14) no se cumpla es si $\chi(S_I) = 1$ y $P(a_{jk}) + P(a_{kl}) + P(a_{lj}) > \pi$; veremos que esto no es posible. Supongamos que $\chi(S_I) = 1$ y sea $I' = I \cup \{j, k, l\}$. Como S_I es conexo, entonces $S_{I'}$ también. Probaremos ahora que $\chi(S_{I'}) = 1$. Etiquetemos $v_{j_0}, v_{j_1}, \dots, v_{j_p}, \dots, v_{j_m}$ a los vértices adyacentes a v_j , de tal manera que $v_{j_0} = v_k, v_{j_p} = v_l$ y $v_{j_1} \in V_I$. Como $L = 3$, entonces se debe cumplir que $v_{j_r} \in V_I$ para $1 \leq r \leq p-1$ y $v_{j_r} \notin V_I$ para $r \geq p$. Algo similar pasa con v_k y v_l . Se sigue entonces que

$$|V_{I'}| = |V_I| + 3, \quad |A_{I'}| = |A_I| + d_j^l + d_k^l + d_l^j + 3 \quad \text{y} \quad |T_{I'}| = |T_I| + d_j^l + d_k^l + d_l^j,$$

en donde $l_m = |\Gamma(m) \cap I|$ para $m \in \{i, j, k\}$, y por lo tanto $\chi(S_{I'}) = \chi(S_I) = 1$. Por el Lema 3.11 se tiene que $S_{I'}$ es contraíble, por lo tanto \mathcal{L} también. Más aún, usando la notación del Lema 3.11, tenemos que $G_{I'}$ es un árbol y B_1, \dots, B_s son discos, entonces \mathcal{L} debe estar contenido en algún B_p y, por lo tanto, \mathcal{L} es la frontera de un disco en S . Esto implica que $P(a_{jk}) + P(a_{kl}) + P(a_{lj}) < \pi$, de lo contrario, por (ii) se tendría que $\Delta_{jkl} \in T$, y entonces $S_{(I')^c}$ sería vacío o constaría sólo de vértices aislados. En cualquier caso se tendría $\chi(S_{I'}) \leq \chi(S) < 0$, lo cual es falso.

Para probar el resultado cuando S_I no es conexo, consideremos $I_1, I_2, \dots, I_q \subset I$ tales que S_{I_1}, \dots, S_{I_q} sean las componentes conexas de S_I . Se tiene que

$$\chi(S_I) = \sum_{r=1}^q \chi(S_{I_r}) \quad \text{y} \quad \text{Lk}(I) = \bigcup_{r=1}^q \text{Lk}(I_r),$$

y como (3.14) es cierta para cada I_r , entonces también lo es para I . ■

Presentaremos ahora dos interesantes corolarios, con los cuales concluimos el capítulo y este trabajo.

Corolario 3.13. (*Andreev-Koebe-Thurston*) Sean S una superficie cerrada con característica de Euler negativa y $\Phi : \|\mathcal{K}\| \rightarrow S$ una triangulación de S . Entonces existe una única métrica hiperbólica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en S tal que las aristas de la triangulación son geodésicas, y una única configuración de bolas cerradas con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, una bola \bar{B}_v centrada en v por cada vértice v de la triangulación, tales que \bar{B}_{v_i} y \bar{B}_{v_j} son tangentes si v_i y v_j son adyacentes, y ajenas en caso contrario.

Corolario 3.14. Sean S una superficie cerrada con característica de Euler 0 y $\Phi : \|\mathcal{K}\| \rightarrow S$ una triangulación de S . Entonces existe una métrica plana en S , única salvo multiplicación por una constante, y una única configuración de bolas cerradas con respecto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, una bola \bar{B}_v centrada en v por cada vértice v de la triangulación, tales que \bar{B}_{v_i} y \bar{B}_{v_j} son tangentes si v_i y v_j son adyacentes, y ajenas en caso contrario.

La demostración de ambos corolarios se basa en que la función $P : A \rightarrow [0, \frac{\pi}{2})$ constante 0 cumple la condición (ii) de la Proposición 3.12. Referimos al lector interesado en consultar las demostraciones de Thurston del Corolario 3.13 y del Corolario 3.14 a [TW, pág. 337, Teo. 13.7.1].

Bibliografía

- [A] Andreev, E. M., *On convex polyhedra in Lobachevskii spaces*. Mat. USSR Sbornik **10**, 413-440 (1970).
- [B-S] Bobenko, Alexander I., Springborn, Boris A, *Variational principles for circle patterns and Koebe's theorem*. Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004), no. 2, 659689.
- [B-J] Bröcker, Theodor and Jänich, Klaus, *Introduction to Differential Topology*. Cambridge University Press, Cambridge-New York (1982).
- [C-L] Chow, Bennett and Luo, Feng, *Combinatorial Ricci flows on surfaces*. J. Differential Geom. **63** (2003), no. 1, 97-129.
- [CV] Colin de Verdière, Yves, *Un principe variationnel pour les empilements de cercles*. Invent. Math. **104** (1991), no. 3, 655669.
- [HR] Hamilton, Richard S., *Three-manifolds with positive Ricci curvature*. J. Differential Geom. **17** (1982) 255306.
- [HA] Hatcher, Allen, *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, Cambridge, UK (2001).
- [KM] Kervaire, Michel A., *A manifold which does not admit any differentiable structure*. Comment. Math. Helv. **34**, 257270 (1960).
- [KP] Koebe, Paul, *Kontaktprobleme der konformen Abbildung*, Abh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Math.-Natur. Kl. **88** (1936), 141-164.
- [LS] Lang, Serge, *Introduction to Differentiable Manifolds, 2nd edition*. Springer-Verlag, New York (2002).
- [LRM] Lee, John M., *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. Springer, New York (1997).
- [LSM] Lee, John M., *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, New York (2013).

- [LTM] Lee, John M., *Introduction to Topological Manifolds, 2nd edn.* Springer, New York (2011).
- [LF] Luo, Feng, *Combinatorial Yamabe flow on surfaces.* Commun. Contemp. Math. **6** (2004), no. 5, 765780.
- [M] Miller, Warner A.; McDonald, Jonathan R.; Alsing, Paul M.; Gu, David X.; Yau, Shing-Tung, *Simplicial Ricci flow.* Comm. Math. Phys. **329** (2014), no. 2, 579608.
- [M-W] Mahwin, Jean and Willem, Michel, *Origin and evolution of the Palais-Smale condition in critical point theory.* J. Fixed Point Theory Appl. **7** (2010), no. 2, 265-290.
- [MJ] Milnor, John W., *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere.* Ann. Math. **64**, 399405 (1956).
- [KS] Stephenson, Kenneth, *Introduction to circle packing. The theory of discrete analytic functions.* Cambridge University Press, Cambridge (2005).
- [TC] Thomassen, Carsten, *The Jordan-Schöenflies theorem and the classification of surfaces.* Am. Math. Monthly **99** (1992), no. 2, 116-130.
- [TW] Thurston, William, *Geometry and topology of 3-manifolds.* Princeton lecture notes (1976), <http://www.msri.org/publications/books/gt3m/>.
- [W] Wilson, Pelham M. H., *Curved Spaces. From Classical Geometries to Elementary Differential Geometry.* Cambridge University Press, Cambridge (2008).