



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

ÓRBITAS CERRADAS EN FLUJOS CASIGEODÉSICOS

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
IRVING DANIEL CALDERÓN CAMACHO

DIRECTOR
DRA. ANA RECHTMAN BULAJICH
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

27 DE ABRIL DE 2017

Índice general

1. Flujos casigeodésicos	3
1.1. El espacio de órbitas de un flujo casigeodésico	4
1.2. Comportamiento en el infinito	7
2. El círculo universal de un flujo casigeodésico	13
2.1. Las descomposiciones positivas y negativas de P	13
2.2. Órdenes circulares	14
2.3. El orden circular para continuos no acotados del plano	15
2.4. El círculo universal de una descomposición del plano	16
2.5. Compactando \mathbb{R}^2 con el círculo universal	17
2.6. Aplicación a flujos casigeodésicos	17
3. Órbitas cerradas en flujos casigeodésicos	21

Introducción

Diremos que un flujo φ en una 3-variedad hiperbólica y cerrada M es casigeodésico si cualquier órbita de φ se levanta a una casigeodésica de \mathbb{H}^3 , es decir, una curva que está cercana en cierto sentido a una geodésica de \mathbb{H}^3 . En [2], Calegari muestra que si M admite un flujo casigeodésico φ , partiendo del espacio de órbitas del levantamiento a \mathbb{H}^3 de φ se puede construir de manera natural un espacio topológico homeomorfo a un círculo, al que llama *círculo universal*, en el que $\pi_1(M)$ actúa fielmente por homeomorfismos que preservan orientación. Hay variedades hiperbólicas cuyo grupo fundamental no puede actuar de esta manera en un círculo, por ejemplo, la variedad de Weeks, por lo que no toda variedad hiperbólica admite un flujo casigeodésico. En 2006 Calegari conjetura que todo flujo casigeodésico tiene una órbita cerrada (a lo que llamaremos en este trabajo *Problema de la Órbita Cerrada para flujos casigeodésicos*); Frankel demuestra la conjetura en [5]. El objetivo principal de esta tesina es presentar parcialmente la solución de Frankel.

La búsqueda de órbitas cerradas en variedades de dimensión 3 no es algo nuevo. La historia del *Problema de la Órbita Cerrada* comienza en 1950 cuando Seifert pregunta en [20] si todo campo vectorial en \mathbb{S}^3 tiene órbitas cerradas. Schweitzer da respuesta negativa en 1974 en [19], probando algo mucho más general: siempre hay un representante sin órbitas periódicas en la clase de homotopía de cualquier campo vectorial \mathcal{C}^1 de cualquier 3-variedad. En años subsecuentes aparecen construcciones de campos vectoriales más regulares sin órbitas periódicas. Las más recientes son el ejemplo \mathcal{C}^∞ que da K. Kuperberg [15] en 1994 y el ejemplo \mathcal{C}^1 que preserva volumen que construye G. Kuperberg [14] en 1996. Por otro lado, se descubre que para campos vectoriales con algunas restricciones geométricas, la respuesta a la pregunta de Seifert es afirmativa. En esta dirección, Taubes [21] prueba en 2007 que todo campo de Reeb en una variedad cerrada de dimensión 3 tiene órbitas cerradas (Conjetura de Weinstein en dimensión 3); Rechtman [18] demuestra en 2010 que los flujos \mathcal{C}^ω geodesibles (para los que hay una métrica riemanniana que hace geodésicas a sus órbitas) en una 3-variedad cerrada siempre tienen órbitas periódicas, excepto cuando la variedad es la suspensión de un difeomorfismo parabólico del toro.

Este trabajo consta de tres capítulos. En el Capítulo 1 se desarrolla la teoría básica de flujos casigeodésicos: se prueba que el espacio de órbitas del levantamiento a \mathbb{H}^3 de un flujo casigeodésico en una 3-variedad hiperbólica cerrada es homeomorfo a \mathbb{R}^2 ; también se estudia cómo las órbitas levantadas a \mathbb{H}^3 de estos flujos se acercan a la frontera de \mathbb{H}^3 por medio de las funciones que mandan cada punto de \mathbb{H}^3 a los extremos positivo y negativo, respectivamente, de su órbita. En el Capítulo 2 se presenta la construcción del círculo universal de un flujo casigeodésico y se explica cómo compactar el espacio de órbitas (al que se hace referencia en el Capítulo 1) a un disco cerrado cuya frontera es el círculo universal. Finalmente, armados con las herramientas desarrolladas en los primeros dos capítulos, en el Capítulo 3 se presenta parte de la prueba de Frankel de que todo flujo casigeodésico en una 3-variedad hiperbólica cerrada tiene una órbita cerrada.

Capítulo 1

Flujos casigeodésicos

Antes de discutir el objetivo de este capítulo necesitamos algunas definiciones. Una *variedad hiperbólica* es una variedad riemanniana completa, conexa y con curvatura seccional constante -1 ; trabajaremos siempre con variedades orientables. Toda n -variedad hiperbólica M es isométrica al n -espacio hiperbólico módulo un subgrupo discreto de isometrías que actúa libremente y propiamente discontinuamente (ver [16, Corolario 11.3]); en particular, el espacio cubriente universal de cualquier n -variedad hiperbólica es \mathbb{H}^n . Un *flujo* en una variedad M es una acción continua de \mathbb{R} en M , es decir, una función continua

$$\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M,$$

con la propiedad de que $\varphi(t, \varphi(s, p)) = \varphi(t + s, p)$ para cualesquiera $t, s \in \mathbb{R}$ y $p \in M$. En este trabajo consideraremos solamente flujos de clase \mathcal{C}^1 . Por *encaje casi-isométrico* entenderemos una función entre espacios métricos $f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ para la cual existen constantes $k > 1$ y $\varepsilon \geq 0$ que cumplen que

$$\frac{1}{k}\rho(f(a), f(b)) - \varepsilon \leq d(a, b) \leq k\rho(f(a), f(b)) + \varepsilon,$$

para cualquier par de puntos $a, b \in X$. Cuando queramos hacer referencia explícita a las constantes k y ε diremos que f es una (k, ε) casi-isometría. Finalmente, una *casigeodésica* en un espacio métrico (X, d) es un encaje casi-isométrico de \mathbb{R} en X . Diremos que un flujo φ en una 3-variedad hiperbólica M es un *flujo casigeodésico* si las órbitas de su levantamiento a \mathbb{H}^3 son casigeodésicas.

El propósito de este primer capítulo es familiarizarnos con los flujos casigeodésicos estudiando algunas de sus propiedades dinámicas (nos basaremos en [2]). En la primera sección probaremos que el espacio de órbitas del levantamiento a \mathbb{H}^3 de un flujo casigeodésico en una 3-variedad hiperbólica compacta M es homeomorfo a \mathbb{R}^2 , mientras que en la segunda sección se analiza la manera en la que las órbitas de un flujo casigeodésico se acercan a la frontera \mathbb{S}_∞^2 de \mathbb{H}^3 , lo que hemos llamado *comportamiento en el infinito*.

Antes de comenzar a desarrollar la teoría de los flujos casigeodésicos, veamos un ejemplo: en el Teorema 0.1 de [22], Thurston prueba que la suspensión de cualquier difeomorfismo pseudo-Anosov de una superficie hiperbólica y cerrada S (o más precisamente, de cualquier difeomorfismo isotópico a un homeomorfismo pseudo-Anosov) admite una estructura hiperbólica. Después, junto con Cannon, muestra que el flujo de suspensión es casigeodésico. Zeghib generaliza este ejemplo en la Afirmación 1.3 de [25] mostrando que para las 3-variedades que se obtienen como suspensión de este tipo, cualquier flujo transversal a la foliación por superficies es casigeodésico. Presentaremos los detalles de su argumento.

Sean M la suspensión de un difeomorfismo pseudo-Anosov de una superficie hiperbólica cerrada S , y \mathcal{F} la foliación natural de M por copias de S . Para probar que un flujo ψ transversal a \mathcal{F} es casigeodésico,

encontraremos una métrica riemanniana g_1 de M para la cual las órbitas de ψ sean geodésicas, y luego usaremos la compacidad de M para comparar la distancia hiperbólica entre puntos en la misma órbita del levantamiento $\tilde{\psi}$ de ψ a \mathbb{H}^3 con la distancia medida sobre la órbita. Como M es compacta, entonces es completa con cualquier métrica riemanniana; se sigue que toda variedad cubriente de M es completa con cualquier métrica inducida por una de M . Sean X el campo vectorial que genera a ψ y g_0 la métrica hiperbólica de M . Reparametrizando de ser necesario, podemos suponer que \mathcal{F} es invariante bajo ψ (el flujo reparametrizado es casigeodésico si y sólo si el flujo original lo es). Consideremos una métrica g_1 en M que haga a X unitario y ortogonal a las hojas de \mathcal{F} . Fijemos una hoja S_0 de \mathcal{F} y sea $\tilde{M} = S_0 \times \mathbb{R}$. La función $F : \tilde{M} \rightarrow M$ definida como

$$F(t, x) = \psi(t, x)$$

es una aplicación cubriente diferenciable. Denotemos $\bar{\psi}$ al levantamiento de ψ a \tilde{M} y sea $h = F^*g_1$. Notemos que el campo tangente a $\bar{\psi}$ es simplemente $\frac{\partial}{\partial t}$, el cual es unitario con respecto a h , y que las hojas de $F^*\mathcal{F}$ son de la forma $S_0 \times \{c\}$. Mostraremos que las órbitas de $\bar{\psi}$ son geodésicas probando que, salvo reparametrización, son las únicas curvas que realizan la distancia entre cualesquiera dos de sus puntos. Supongamos que $\alpha(s) = (x(s), t(s))$ es una curva con velocidad unitaria que realiza la distancia entre (x, t_1) y (x, t_2) . Como $\beta(s) = (x, t(s))$ también conecta a estos dos puntos y tiene longitud menor o igual que la curva minimizante α , es inmediato que $\alpha = \beta$, y entonces

$$\dot{\alpha}(s) = a(s) \frac{\partial}{\partial t}.$$

Recordemos que α tiene velocidad unitaria, así que $a(s) \equiv 1$, lo que quiere decir que α es un segmento de órbita de $\bar{\psi}$.

Llamemos H a la aplicación cubriente de \mathbb{H}^3 a M y denotemos $\tilde{\psi}$ al levantamiento de ψ a \mathbb{H}^3 . Consideremos las métricas $h_0 = H^*g_0$ y $h_1 = H^*g_1$ de \mathbb{H}^3 , y sus respectivas distancias riemannianas d_1 y d_2 . Las órbitas de $\tilde{\psi}$ también son minimizantes entre cualquier par de sus puntos porque \mathbb{H}^3 cubre a M . Esto implica que

$$d_1(\tilde{\psi}(t_1, x), \tilde{\psi}(t_2, x)) = |t_1 - t_2|.$$

Además, como M es compacta, existe una constante positiva C tal que $\frac{1}{C}d_0 \leq d_1 \leq Cd_0$. Entonces las órbitas de $\tilde{\psi}$ son $(C, 0)$ -casigeodésicas, por lo que el flujo ψ es casigeodésico.

1.1. El espacio de órbitas de un flujo casigeodésico

Toda órbita ℓ del levantamiento a \mathbb{H}^3 de un flujo casigeodésico es una (k, ε) -casigeodésica para algunas constantes k y ε que, en principio, pueden depender de ℓ . En cambio, diremos que un flujo es *uniformemente casigeodésico* si existen k y ε tales que toda órbita de su levantamiento a \mathbb{H}^3 es (k, ε) -casigeodésica. A lo largo de esta sección consideraremos un flujo φ uniformemente (k, ε) -casigeodésico en una 3-variedad hiperbólica M , cuyo levantamiento a \mathbb{H}^3 denotaremos $\tilde{\varphi}$. El espacio de órbitas de $\tilde{\varphi}$ (que denotaremos P) es el espacio cociente de \mathbb{H}^3 que se obtiene al identificar todos los puntos de cada órbita de $\tilde{\varphi}$. Llamaremos π a la función cociente $\mathbb{H}^3 \rightarrow P$. Para probar que P es homeomorfo a \mathbb{R}^2 , mostraremos que P es una 2-variedad simplemente conexa no homeomorfa a \mathbb{S}^2 .

Comencemos observando que P es 2^o-numerable pues π es una función suprayectiva y abierta (por ser la proyección al espacio de órbitas de una acción continua), así que cualquier base numerable de \mathbb{H}^3 va a dar bajo π a una base numerable de P . Dividiremos el resto de la prueba en tres lemas.

Lema 1.1. *P es Hausdorff.*

Demostración. Supongamos que P no es Hausdorff. Entonces hay un par de órbitas α y β que no tienen vecindades ajenas en P . Consideremos puntos $x \in \alpha$ y $y \in \beta$. Para cada entero positivo n , los abiertos $\tilde{\varphi}(\mathbb{R} \times B(x, 1/n))$ y $\tilde{\varphi}(\mathbb{R} \times B(y, 1/n))$ se intersecan, por lo que podemos tomar puntos $x_n \in B(x, 1/n)$ y $y_n \in B(y, 1/n)$ en la misma órbita ℓ_n , y estos cumplen que $x_n \rightarrow x$ y $y_n \rightarrow y$. Cada y_n se puede expresar como $\tilde{\varphi}(t_n, x_n)$. Como ℓ_n es (k, ε) -casigeodésica, se tiene que

$$|t_n| \leq kd(x_n, y_n) + \varepsilon.$$

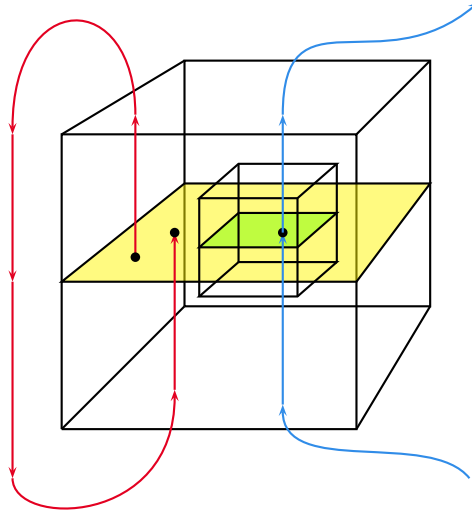
Además, la distancia hiperbólica de x_n a y_n está acotada porque las sucesiones convergen. Esto nos garantiza que hay una subsucesión $(t_{n_i})_i$ que converge a cierto t_0 . Entonces, por un lado se tiene que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}(t_{n_i}, x_{n_i}) = \tilde{\varphi}(t_0, x) \in \alpha,$$

pero por otra parte $\tilde{\varphi}(t_{n_i}, x_{n_i}) = y_{n_i} \rightarrow y \in \beta$. Esto contradice el hecho de que α y β son ajenas, por lo que P debe ser Hausdorff. \square

Lema 1.2. P es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^2 .

Demostración. Consideremos un punto cualquiera p de \mathbb{H}^3 y coordenadas locales $\psi = (x, y, z)$ alrededor de p tales que $\psi(p) = (0, 0, 0)$ y $\tilde{\varphi}$ esté generado por el campo $\frac{\partial}{\partial z}$ en el cubo $(-a, a)^3$, para algún $a > 0$. Para cada $b \leq a$, denotemos C_b al cubo $(-b, b)^3$ y S_b al cuadrado $(-b, b)^2 \times \{0\}$. Diremos que C_b es un cubo chico si toda órbita de $\tilde{\varphi}$ interseca a lo más una vez a S_b . Probaremos que hay un cubo chico, el cual nos da inmediatamente una vecindad de $\pi(p)$ homeomorfa al plano.



Primero notemos que si q_0 y $q_1 = \tilde{\varphi}(q_0, t_1)$ están en S_a para algún $t_1 > 0$, entonces $t_1 > 2a$ porque la órbita ℓ de q_0 necesita tiempo a para salir de C_a , y cuando vuelve a entrar necesita nuevamente tiempo a para regresar a S_a . Esto prueba que si q_0 regresa por n -ésima vez S_a a tiempo $t_n > 0$, entonces $t_n > 2an$. Por otra lado, como ℓ es (k, ε) -casigéodésica, se cumple que

$$t_n \leq kd(q_0, \tilde{\varphi}(t_n, q_0)) + \varepsilon \leq k\delta + \varepsilon,$$

en donde δ es el diámetro de S_a . Esto implica que ninguna órbita de $\tilde{\varphi}$ puede visitar S_a una infinidad de veces. Podemos entonces suponer que desde un inicio elegimos a suficientemente pequeño de manera que la órbita de p visita S_a una sola vez, de modo que $\tilde{\varphi}(t, p)$ está fuera de C_a si $|t| > a$.

Si ningún C_b es cubo chico, entonces para todo $b \in (0, a)$ hay una órbita que visita S_b al menos dos veces. Consideremos una sucesión decreciente $(b_n)_{n \geq 1}$ que converja a 0, y para cada n , sea q_n un punto en S_{b_n} cuya órbita regresa a S_{b_n} a tiempo $t_n > 2a$. Los números t_n están acotados entre $2a$ y $2k\delta + \varepsilon$, por lo que, tomando una subsucesión de ser necesario, podemos suponer que convergen a cierto t_0 , que necesariamente es mayor que a . Como $q_n \rightarrow p$, entonces $r_n := \tilde{\varphi}(t_n, q_n) \rightarrow \tilde{\varphi}(t_0, p)$, que es un punto fuera de C_a . Esto es una contradicción porque habíamos supuesto que r_n estaba en S_{b_n} , por lo que $r_n \rightarrow p \in C_a$. Esto muestra que algún C_b es un cubo chico. Para tal cubo, el conjunto $\pi(C_b)$ es un abierto en P homeomorfo a S_b . □

Notemos que la prueba del lema anterior también nos dice que π admite secciones locales. En efecto, si C_b es un cubo chico, la restricción de π a S_b es un homeomorfismo entre S_b y $\pi(C_b)$, de manera que su inversa es una sección local de π .

Lema 1.3. *P es simplemente conexo.*

Demostración. El espacio de órbitas P es conexo por trayectorias pues es imagen continua de \mathbb{H}^3 , el cual es conexo por trayectorias. Para probar que $\pi_1(P)$ es trivial, basta con ver que cada clase de homotopía de lazos tiene un representante que se levanta a un lazo en \mathbb{H}^3 . Cualquier lazo γ en P se puede subdividir en pequeños segmentos que contenidos en el dominio de una sección local de π . Construyamos un levantamiento $\tilde{\gamma}$ de γ mediante dichas secciones locales. La trayectoria $\tilde{\gamma}$ no es necesariamente un lazo, pero $\tilde{\gamma}(0)$ y $\tilde{\gamma}(1)$ están en la misma órbita ℓ de $\tilde{\varphi}$. Sea $\tilde{\gamma}$ el lazo que se obtiene al cerrar $\tilde{\gamma}$ con el segmento de ℓ que une sus puntos extremos. Los lazos $\pi \circ \tilde{\gamma}$ y γ son homotópicos porque el primero es una reparametrización del segundo. □

Del trabajo hecho hasta ahora podemos concluir que P es homeomorfo a \mathbb{R}^2 o a \mathbb{S}^2 . Para descartar a \mathbb{S}^2 , notemos que como las órbitas de $\tilde{\varphi}$ no son cerradas (porque las órbitas son casigeodésicas, y estas siempre se escapan a \mathbb{S}_∞^2), se tiene un haz fibrado (más aún, un \mathbb{R} -haz principal)

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^3 \rightarrow P.$$

De la sucesión exacta de grupos de homotopía del haz se sigue que P tiene grupos de homotopía triviales, pues \mathbb{R} y \mathbb{H}^3 son contraíbles. Por lo tanto P no es una esfera. Esto completa la prueba del resultado principal de la sección.

Teorema 1.4. *P es homeomorfo a \mathbb{R}^2 .*

Al ser P contraíble, todo \mathbb{R} -haz principal sobre P es isomorfo al haz trivial $P \times \mathbb{R} \rightarrow P$ (ver el Teorema 9.9 de [11]). Esto nos dice que el flujo $\tilde{\varphi}$ es muy sencillo en el siguiente sentido:

Proposición 1.5. *La foliación de \mathbb{H}^3 por las órbitas de $\tilde{\varphi}$ es topológicamente equivalente a la foliación de \mathbb{R}^3 por rectas paralelas al eje z .*

Para cerrar esta sección, mostraremos que todo flujo casigeodésico en una variedad hiperbólica cerrada es automáticamente uniformemente casigeodésico. Para esto necesitaremos un resultado que nos dice que ser casigeodésica es una propiedad local. Por comodidad llamaremos k -casigeodésica a una (k, k) -casigeodésica. Diremos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^3$ es una k -casigeodésica local a escala c si cada vez que $|a - b| \leq c$, se cumple que $d(f(a), f(b)) \geq |a - b|/k - k$. Para cada $k \geq 1$ existe una constante $c(k)$ que cumple que toda k -casigeodésica a escala $c(k)$ es $2k$ -casigeodésica global (ver la Observación 7.2.B de [8] o la observación que aparece después del Corolario 1.14 en [1]).

Proposición 1.6. *Todo flujo casigeodésico en una 3-variedad hiperbólica cerrada es uniformemente casigeodésico.*

Demostración. Supongamos que $\tilde{\varphi}$ no es uniformemente casigeodésico. Esto quiere decir que hay una sucesión ℓ_1, ℓ_2, \dots de órbitas de $\tilde{\varphi}$ que son k_i -casigeodésicas (para cada ℓ_i elegimos el mínimo k_i), con $k_i \rightarrow \infty$. Podemos además suponer que $k_i > 2^i$. Fijemos un entero positivo n . Sea $j > n$. Como ℓ_j no es 2^j -casigeodésica, hay un segmento $\ell_j^{j-1} \subset \ell_j$ de longitud menor o igual que $c(2^{j-1})$ con extremos p_j^{j-1}, q_j^{j-1} tal que

$$d(p_j^{j-1}, q_j^{j-1}) < \frac{d_{\ell_j}(p_j^{j-1}, q_j^{j-1})}{2^{j-1}} - 2^{j-1}.$$

El segmento ℓ_j^{j-1} no es 2^{j-1} -casigeodésica. Iterando este procedimiento se construye una sucesión anidada de intervalos

$$\ell_j^n \subseteq \ell_j^{n+1} \subseteq \dots \subseteq \ell_j^{j-1}$$

con la propiedad de que el intervalo ℓ_j^i tiene extremos p_j^i y q_j^i tales que

$$d(p_j^i, q_j^i) < \frac{d_{\ell_j}(p_j^i, q_j^i)}{2^i} - 2^i. \quad (1.1)$$

Llamemos z_j al punto medio de ℓ_j^n . Podemos suponer, tomando una subsucesión si fuera necesario, que hay transformaciones cubrientes $g_j \in \pi_1(M)$ tales que $g_j(z_j)$ converge a un punto z cuya órbita denotaremos ℓ . Sean α_j y α las parametrizaciones de ℓ_j y ℓ que empiezan en z_j y z , respectivamente.

Ahora consideremos cualquier entero $m > n$. Como la longitud de cada segmento ℓ_j^m es a lo más $c(2^m)$ y $\alpha_j|_{[-c(2^m), c(2^m)]}$ converge uniformemente a $\alpha|_{[-c(2^m), c(2^m)]}$, podemos tomar una subsucesión (z_{j_i}) de manera que

$$g_{j_i}(p_{j_i}^m) \rightarrow p^m \quad \text{y} \quad g_{j_i}(q_{j_i}^m) \rightarrow q^m.$$

Ya que las transformaciones cubrientes son isometrías, usando (1.1) y haciendo tender i a ∞ obtenemos que

$$d(p^m, q^m) \leq \frac{d_{\ell}(p^m, q^m)}{2^m} - 2^m < \frac{d_{\ell}(p^m, q^m)}{2^{m-1}} - 2^{m-1},$$

lo cual implica que ℓ no es 2^{m-1} -casigeodésica. Como m es cualquier entero mayor que n , se concluye que ℓ no es casigeodésica, lo cual es una contradicción. \square

1.2. Comportamiento en el infinito

Una de las razones por la que las casigeodésicas son tan útiles para el estudio de \mathbb{H}^3 (o más generalmente, de espacios δ -hiperbólicos) es que cada (k, ε) -casigeodésica γ está a distancia de Hausdorff menor que una constante $D(k, \varepsilon)$ de una única geodésica (ver [13, Corolario 3.44]) que denotaremos γ_g . En particular, las casigeodésicas tienen puntos extremos distintos bien definidos en la frontera \mathbb{S}_{∞}^2 de \mathbb{H}^3 , lo que nos permitirá estudiar los flujos casigeodésicos concentrándonos en su comportamiento en el infinito, es decir, viendo cómo se acercan sus órbitas a \mathbb{S}_{∞}^2 . Motivados por esto, dado un flujo casigeodésico φ en una 3-variedad hiperbólica y cerrada M , consideraremos los mapeos de punto final

$$e^+, e^- : P \rightarrow \mathbb{S}_{\infty}^2,$$

que mandan cada órbita de $\tilde{\varphi}$ a sus extremos positivo y negativo, respectivamente. La manera de probar que e^+ y e^- son continuas es la siguiente: que una sucesión $(p_i)_i$ de P converja a p_{∞} significa que podemos elegir puntos $x_i \in \ell_i := \pi^{-1}(p_i)$ tales que $\tilde{\varphi}_{x_i} := \tilde{\varphi}(\cdot, x_i)$ converge uniformemente en compactos a $\tilde{\varphi}_{x_{\infty}}$. Como cada casigeodésica ℓ_i dista menos que D (que depende sólo de las constantes para las que el flujo es uniformemente casigeodésico) de $(\ell_i)_g$, entonces para cualesquiera constantes $K > 2D$ y $R > 0$, la

K -vecindad de $(\ell_\infty)_g$ contiene segmentos de $(\ell_i)_g$ de longitud R para $i \gg 0$. Veremos que esto implica que para cualesquiera $\varepsilon > 0$ y $L > 0$, la ε -vecindad de $(\ell_\infty)_g$ contiene un segmento de $(\ell_i)_g$ de longitud L para $i \gg 0$. Lo anterior es consecuencia inmediata del lema siguiente.

Lema 1.7. *Sean ℓ una geodésica de \mathbb{H}^3 y K una constante positiva. Supongamos que I es un segmento geodésico de longitud $2T$, con $T > 2K$, contenido en la K -vecindad de ℓ . Entonces hay un segmento $J \subset I$ de longitud mayor o igual que $T/2$, contenido en la $\log\left(\frac{2}{\sinh(\frac{T}{2}-K)} + 1\right)$ -vecindad de ℓ .*

Para la prueba del Lema 1.7 usaremos dos resultados auxiliares; en las demostraciones de éstos emplearemos la siguiente notación: d es la métrica hiperbólica en \mathbb{H}^3 ; para $A, B \in \mathbb{H}^3$, denotaremos $[A, B]$ y $\langle A, B \rangle$ al segmento geodésico cerrado entre A y B y a la geodésica completa que pasa por estos dos puntos, respectivamente. Finalmente, definiremos AB como $d(A, B)$. Nos será útil la siguiente observación sencilla que enunciamos y probamos al mismo tiempo: para todo $x > 0$ se cumple que

$$\operatorname{arcsen}hx = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \leq \log(x + \sqrt{x^2 + 2x + 1}) = \log(2x + 1). \quad (1.2)$$

Lema 1.8. *Sean ABC un triángulo en \mathbb{H}^3 y X el punto medio de $[A, B]$. Entonces*

$$d(X, \langle A, C \rangle) \leq \log\left(\frac{\sinh BC}{\cosh \frac{AB}{2}} + 1\right).$$

Demostración. Cualesquiera tres puntos en \mathbb{H}^3 son coplanares, por lo que podemos suponer que estamos trabajando con un triángulo en \mathbb{H}^2 . Sean Y y Z las proyecciones ortogonales de X y B en $\langle A, C \rangle$. Aplicamos la Ley de Senos a los triángulos AXY y ABZ para obtener que

$$\sinh XY = \operatorname{sen} \angle CAB \sinh AX = \frac{\sinh BZ \sinh \frac{AB}{2}}{\sinh AB} = \frac{\sinh BZ}{2 \cosh \frac{AB}{2}} \leq \frac{\sinh BC}{2 \cosh \frac{AB}{2}}.$$

La desigualdad buscada se obtiene al combinar la anterior con (1.2). \square

Lema 1.9. *Sean A, B, C y D cuatro punto en \mathbb{H}^3 que cumplen que $\angle DAB = \frac{\pi}{2}$, $\angle ABC \geq \frac{\pi}{2}$, $\angle CDA \geq \frac{\pi}{2}$ y $BC > CD$. Entonces*

$$AB \leq \log\left(\frac{2}{\sinh(BC - CD)} + 1\right).$$

Demostración. El Lema 3.5 de [13] nos asegura que en un cuadrilátero como el que estamos considerando se cumple que

$$\sinh AB \leq \frac{1}{\sinh AD}. \quad (1.3)$$

Por otro lado, $[A, C]$ es el lado mayor del triángulo ABC pues su ángulo opuesto es mayor o igual que $\frac{\pi}{2}$; de manera que $BC \leq AC \leq AD + CD$. Finalmente, usando (1.3) y (1.2) se llega a

$$AB \leq \log\left(\frac{2}{\sinh AD} + 1\right) \leq \log\left(\frac{2}{\sinh(BC - CD)} + 1\right).$$

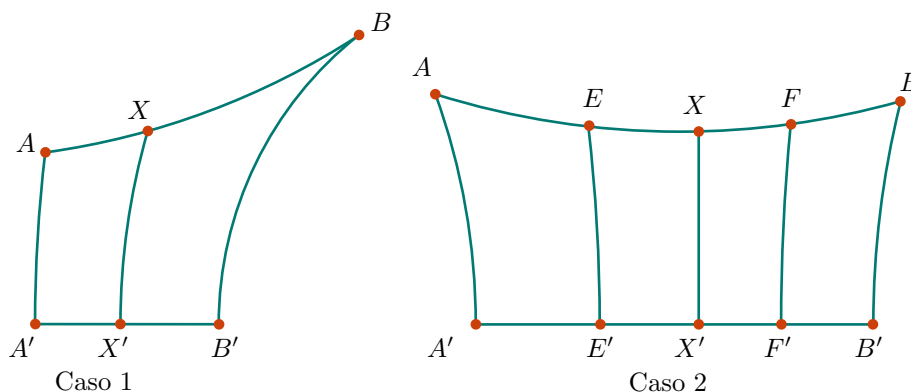
\square

Demostración de Lema 1.7. Denotaremos Q' al punto de ℓ más cercano a un punto Q de \mathbb{H}^3 . Recordemos que si ℓ_1 y ℓ_2 son geodésicas de \mathbb{H}^3 que no comparten extremos, su distancia es positiva y hay un único par de puntos $X_1 \in \ell_1, X_2 \in \ell_2$ que la realiza; además, $\langle X_1, X_2 \rangle$ es perpendicular a ℓ_1 y ℓ_2 (ver el Lema

2.5.3 de [23]). Sea $\gamma : [0, 2T] \rightarrow [A, B]$ la parametrización por longitud de arco que empieza en A , y llamemos C al punto medio de $[A, B]$. Consideremos primero el caso en el que el punto X de $[A, B]$ que minimiza la distancia a ℓ no está en el segmento abierto (A, B) o que tal punto X no existe (las geodésicas comparten un extremo). Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $d(\gamma(t), \ell)$ es creciente, por lo que $\angle BCC'$ y $\angle BAA'$ son mayores o iguales que $\frac{\pi}{2}$. Del Lema 1.9 se sigue que

$$CC' \leq \log \left(\frac{2}{\sinh(T - K)} + 1 \right) =: \varepsilon_T,$$

así que todo punto de $[A, C]$ dista menos que ε_T de ℓ (y $\varepsilon_{T/2} \leq \varepsilon_T$). Si el punto X está en (A, B) , tomamos los puntos medios E y F de $[A, X]$ y $[X, B]$. Si cada uno de estos segmentos mide más que K , por el caso anterior se tiene que $[E, X] \subseteq V_{EX/2}(\ell)$ y $[X, F] \subseteq V_{XF/2}(\ell)$; entonces $[E, F]$ está contenido en la ε_T vecindad de ℓ (ε_t es decreciente). Si tuviéramos la mala suerte de que $[A, X]$ o $[B, Y]$ tiene longitud menor o igual que K , nos fijamos en el más largo de los dos segmentos, digamos $[A, X]$. Como $AX \geq T > K$, por el caso 1 se tiene que $[E, X]$ es un segmento de longitud $\geq T/2$ contenido en la $\varepsilon_{EX/2}$ -vecindad de ℓ .



□

La acción de $\pi_1(M)$ en \mathbb{H}^3 por transformaciones cubrientes induce dos acciones más que nos serán útiles. Primero, cualquier elemento de $\pi_1(M)$ manda órbitas de $\tilde{\varphi}$ en órbitas, lo que nos da una acción de $\pi_1(M)$ en P . Por otra parte, recordemos que toda isometría de \mathbb{H}^3 se extiende de manera única a $\overline{\mathbb{H}^3} = \mathbb{H}^3 \cup \mathbb{S}_\infty^2$, actuando en \mathbb{S}_∞^2 como una transformación de Möbius; por lo tanto $\pi_1(M)$ actúa también en \mathbb{S}_∞^2 . Al aplicar $g \in \pi_1(M)$ a una órbita ℓ de $\tilde{\varphi}$ se obtiene una órbita $g\ell$ con extremos $g(e^+(\ell))$ y $g(e^-(\ell))$. Dicho de otra manera, los mapeos de punto final e^+ y e^- son $\pi_1(M)$ -equivariantes con respecto a las dos acciones ya mencionadas.

Para subconjuntos A y B de \mathbb{S}_∞^2 , definimos los siguientes conjuntos:

$$\{A \rightarrow\} = (e^-)^{-1}(A), \quad \{\rightarrow B\} = (e^+)^{-1}(B), \quad \{A \rightarrow B\} = \{A \rightarrow\} \cap \{\rightarrow B\}.$$

Lema 1.10. Si A y B son subconjuntos compactos y ajenos de \mathbb{S}_∞^2 , entonces $\{A \rightarrow B\}$ es compacto.

Demostración. Ya sabemos que $\{A \rightarrow B\}$ es cerrado pues e^+ y e^- son continuas, por lo que basta con mostrar que hay un subconjunto compacto de P que contenga a $\{A \rightarrow B\}$. Trabajaremos con el modelo de la bola \mathbb{B}^3 de \mathbb{H}^3 . Llamemos f a la función que manda a cada $(a, b) \in A \times B$ al punto medio (con respecto a la métrica euclidiana) de la geodésica hiperbólica con extremos a y b . El conjunto $C = f(A \times B)$ es compacto porque f es continua. Consideremos puntos x_1, \dots, x_r en \mathbb{H}^3 tales que la unión de las bolas

hiperbólicas cerradas $\overline{B}(x_i, D)$ (tomando D tal que toda órbita de $\tilde{\varphi}$ diste menos que D de una geodésica) contenga a C . Sean ℓ una órbita de $\tilde{\varphi}$ con extremos $a \in A$ y $b \in B$, y x el punto medio de ℓ . Si $y \in \ell$ y $1 \leq s \leq r$ cumplen que $d(y, x) < D$ y $d(x, x_s) \leq D$, entonces $d(y, x_s) < 2D$. Esto prueba que $\{A \rightarrow B\}$ está contenido en el compacto $\pi(\cup_{i=1}^r \overline{B}(x_i, 2D))$. \square

Otra propiedad interesante de los flujos casigeodésicos (que será crucial para probar que éstos tienen siempre órbitas cerradas) es que toda órbita de su levantamiento a \mathbb{H}^3 comparte sus extremos con muchas otras órbitas.

Proposición 1.11. *Si $z \in \mathbb{S}_\infty^2$ es el extremo positivo de alguna órbita de $\tilde{\varphi}$, las componentes de $\{\rightarrow z\}$ son no acotadas.*

Para la prueba de la Proposición 1.11 necesitaremos dos resultados auxiliares. El primero de ellos es un resultado clásico de topología del plano cuya prueba puede consultarse en [24, Corolario 3.11].

Teorema 1.12 (Zoretti). *Sean C una componente de un subconjunto compacto del plano K y ε un número positivo. Entonces existe una curva cerrada simple γ que encierra a C , es ajena a K y tal que todo punto de γ dista menos que ε de algún punto de K .*

Los mapeos e^+ y e^- son $\pi_1(M)$ -equivariantes, así que sus imágenes en \mathbb{S}_∞^2 son $\pi_1(M)$ -invariantes; además, como la acción de $\pi_1(M)$ en \mathbb{S}_∞^2 es mínima porque M es compacta (ver [17]), los conjuntos $e^+(P)$ y $e^-(P)$ son densos en \mathbb{S}_∞^2 . Usaremos este hecho para la prueba del segundo resultado auxiliar.

Lema 1.13. *Si un lazo simple γ en P es frontera de una región compacta D , entonces*

$$e^\pm(\gamma) = e^\pm(D).$$

Demostración. Trabajaremos en el modelo de \mathbb{H}^3 de la bola unitaria \mathbb{B}^3 , identificando a $\overline{\mathbb{H}^3}$ con la bola unitaria cerrada $\overline{\mathbb{B}^3}$. Denotaremos $B_e(p, r)$ a la bola euclidiana de radio r con centro en un punto $p \in \overline{\mathbb{H}^3}$. Sea $s : P \rightarrow \mathbb{H}^3$ una sección de π . El mismo argumento prueba el resultado para e^+ y e^- , por lo que nos concentraremos sólo en e^+ .

Supongamos que hay una órbita $\ell \in D$ tal que $p = e^+(\ell) \notin e^+(\gamma)$. Sea C el subconjunto cerrado de $\overline{\mathbb{H}^3}$ que consta de $s(D)$, todos los rayos positivos que parten de $s(\gamma)$ y los extremos positivos de las órbitas en γ . De la Proposición 1.5 se sigue que $\mathbb{H}^3 \setminus C$ tiene dos componentes

$$\begin{aligned} U' &= \tilde{\varphi}(\mathbb{R}^+ \times (D \setminus \gamma)), \\ V' &= \tilde{\varphi}(\mathbb{R} \times (P \setminus D)) \cup \tilde{\varphi}(\mathbb{R}^- \times (D \setminus \gamma)). \end{aligned}$$

Esto implica que también $\overline{\mathbb{H}^3}$ tiene exactamente dos componentes U y V que contienen a U' y V' , respectivamente. Observemos que si $x \in U'$, entonces $\tilde{\varphi}(x, t) \in U'$ para cualquier $t > 0$ y que $\tilde{\varphi}(x, s)$ está en V' para $s \ll 0$, por lo que ninguna órbita puede estar contenida totalmente en U .

Por otro lado, p está en U porque es el extremo positivo de ℓ , y ℓ está contenida en U a partir de algún momento; entonces $U \cap \mathbb{S}_\infty^2$ es no vacío. Como $e^-(P)$ es denso en \mathbb{S}_∞^2 , alguna órbita ℓ' tiene extremo negativo en $U \cap \mathbb{S}_\infty^2$, por lo que $\tilde{\varphi}(y, s)$ está en U para $s \ll 0$, en donde y es un punto cualquiera de ℓ' . Pero una vez que una órbita entra a U ya no puede escapar en tiempo positivo, así que ℓ' estaría contenida en U , cosa que no puede pasar. \square

Ya estamos listos para probar la Proposición 1.11.

Demostración de la Proposición 1.11. Consideremos una métrica auxiliar en P . Supongamos que hay una componente acotada C de $\{\rightarrow z\}$ para cierto $z \in \mathbb{S}_\infty^2$. Sean R el diámetro de C , x cualquier punto de C y $K = \overline{B}(x, 2R) \cap \{\rightarrow z\}$. El conjunto C es también componente de K , por lo que existe una curva

cerrada simple γ ajena a K , que encierra a C y tal que cualquiera de sus puntos dista menos que R de algún punto en C . De esto último se sigue que γ es ajena a $\{\rightarrow z\}$, pues $\gamma \subseteq B(x, 2R)$. Si llamamos D a la región acotada que limita γ , entonces $z \in e^+(D) \setminus e^+(\gamma)$, contrario al Lema 1.13. \square

Capítulo 2

El círculo universal de un flujo casigeodésico

En este capítulo prepararemos el terreno para abordar en el Capítulo 3 el Problema de la Órbita Cerrada para flujos casigeodésicos. Siguiendo [4] construiremos, partiendo de una descomposición del plano con características particulares, un círculo topológico al que llamaremos círculo universal, que usaremos para compactar el plano. Las funciones e^+ y e^- nos darán descomposiciones del espacio de órbitas P con las características buscadas, permitiéndonos aplicar estas herramientas para reducir el estudio de algunos aspectos dinámicos de un flujo casigeodésico a dinámica en el plano y en el disco unitario. Debido a las limitaciones de extensión de la tesina, no nos será posible incluir pruebas detalladas; esbozaremos las ideas de la construcción, abusando ocasionalmente del uso de argumentos geométricos intuitivos, pero a cambio indicaremos el lugar preciso en [4] en donde el lector interesado puede encontrar las pruebas rigurosas de todas las afirmaciones.

2.1. Las descomposiciones positivas y negativas de P

El espacio de órbitas P es homeomorfo al plano \mathbb{R}^2 , pero no viene equipado con una métrica natural que nos permita hablar de subconjuntos acotados. Sin embargo, la compacidad de un subconjunto de \mathbb{R}^2 es equivalente a ser cerrado y acotado, por lo que diremos que $A \subseteq P$ es acotado si su cerradura es compacta. Por *continuo no acotado* entenderemos un subconjunto de P cerrado, conexo y no acotado. Una *descomposición* de P es una partición de P en conjuntos cerrados. Las funciones de punto final e^- y e^+ son continuas, de modo que

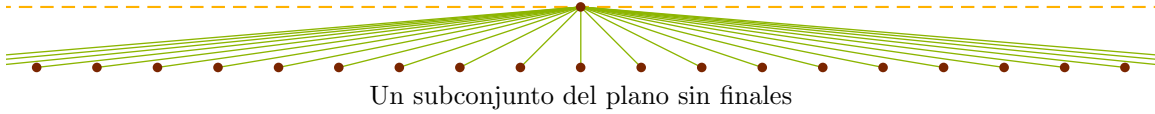
$$\begin{aligned}\mathcal{D}^+ &= \{\text{componentes de } \{\rightarrow z\} \mid z \in e^+(P)\}, \\ \mathcal{D}^- &= \{\text{componentes de } \{z \rightarrow\} \mid z \in e^-(P)\},\end{aligned}$$

son descomposiciones de P , a las cuales llamaremos descomposición positiva y negativa, respectivamente. Adoptando la terminología usada en el mundo de las foliaciones, llamaremos *hojas positivas* a los elementos de \mathcal{D}^+ y *hojas negativas* a los elementos de \mathcal{D}^- . Presentaremos a lo largo del capítulo algunas propiedades que tienen estas descomposiciones; para evitar sonar repetitivos, enunciaremos las afirmaciones sólo para la descomposición positiva, pero será evidente que también son válidas para la descomposición negativa.

Las hojas positivas son continuos no acotados: son cerradas y conexas por definición, y no acotadas por lo Proposición 1.11 Nos interesará saber cómo éstas escapan al infinito. Para formalizar esto, definimos un *final* de un subconjunto no acotado A de P como una función α que asigna a cada subconjunto acotado

B de P una componente $\alpha(B)$ de $A \setminus B$, de manera que si $B' \subset B$, entonces $\alpha(B) \subset \alpha(B')$. El conjunto de finales de A será denotado $\mathcal{F}(A)$. Observemos que un final α de A está determinado por sus valores en cualquier sucesión creciente $B_1 \subset B_2 \subset \dots$ de conjuntos abiertos y acotados cuya unión sea P : cualquier $D \subseteq P$ acotado está contenido en algún B_n , por lo que $\alpha(D)$ es la componente de $A \setminus D$ que contiene a $\alpha(B_n)$.

Hay conjuntos no acotados sin finales. Tomemos como ejemplo, en \mathbb{R}^2 , la unión A de todos los segmentos cerrados de $(0, 1)$ a $(n, 1)$ para cada entero n . El conjunto A no tiene finales porque todas las componentes de $A \setminus \{(0, 1)\}$ son acotadas. En cambio, es fácil ver que la cerradura de A tiene dos finales, cosa que no es fortuita: el conjunto de finales de cualquier continuo no acotado del plano tiene al menos un final (ver la Proposición 4.3 de [4]).



Veremos que se puede equipar al conjunto de finales de las descomposiciones \mathcal{D}^+ y \mathcal{D}^- (o más generalmente, de cualquier descomposición del plano en continuos no acotados)

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}^\pm) = \bigcup_{H \in \mathcal{D}^\pm} \mathcal{F}(H),$$

con un orden natural que nos permitirá identificarlo con un subespacio de \mathbb{S}^1 . Este es el primer paso de la construcción del círculo universal.

2.2. Órdenes circulares

Un *orden circular* en un conjunto S es una función

$$\langle \cdot, \cdot, \cdot \rangle : S^3 \rightarrow \{-1, 0, 1\}$$

que toma el valor 0 solamente en ternas con dos o más coordenadas iguales, y que cumple la relación de cociclo:

$$\langle a, b, c \rangle + \langle a, c, d \rangle - \langle a, b, d \rangle - \langle b, c, d \rangle = 0,$$

para cualesquiera $a, b, c, d \in S$. Llamaremos a un conjunto con un orden circular simplemente *conjunto circular*. En analogía con los órdenes totales, diremos que un subconjunto de un conjunto circular S es un *intervalo abierto* si es de la forma

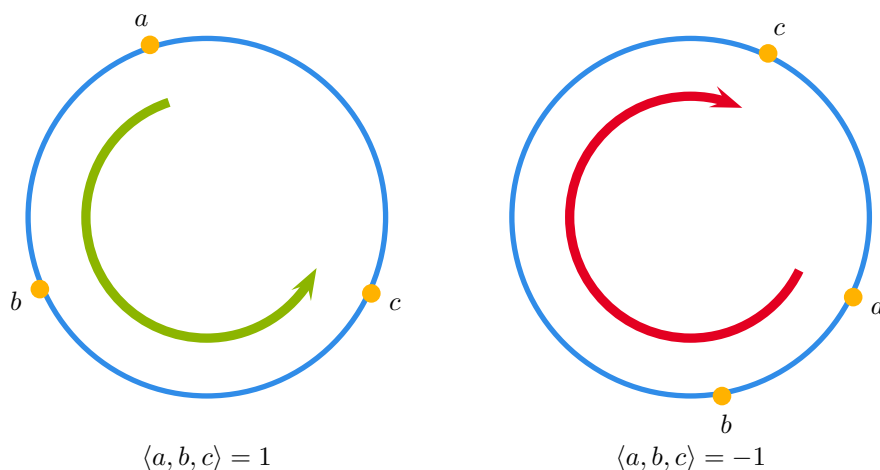
$$(a, b) = \{s \in S \mid \langle a, s, b \rangle = 1\},$$

y será un *intervalo cerrado* si es de la forma

$$[a, b] = \{s \in S \mid \langle a, s, b \rangle \geq 0\}.$$

Siempre dotaremos a los conjuntos circulares con la topología que tiene como base a los intervalos abiertos.

El ejemplo natural de orden circular en \mathbb{S}^1 es el que, a las ternas no degeneradas, asigna el valor 1 si están en sentido antihorario y -1 si están en sentido horario.



La topología inducida por este orden circular coincide con la topología usual de \mathbb{S}^1 . Siendo éste el ejemplo que seguramente motivó la definición de orden circular, es natural preguntarse cuándo un conjunto circular es isomorfo a un subconjunto de \mathbb{S}^1 . La respuesta a esta pregunta será una pieza clave para la construcción del círculo universal.

Requeriremos dos definiciones más: un *hoyo* en un conjunto circular S es una pareja de puntos a, b de S tal que el intervalo abierto (a, b) es vacío; diremos que S es un *conjunto circular completo* si cualquier sucesión anidada de intervalos cerrados tiene intersección no vacía. Cualquier subconjunto cerrado de \mathbb{S}^1 es un ejemplo de conjunto circular completo, mientras que el complemento en \mathbb{S}^1 de un conjunto numerable nunca es completo. En la Construcción 5.3 de [4] se da una manera canónica de encajar cualquier conjunto circular S en un conjunto circular completo \overline{S} . Además, dicho encaje tiene imagen densa, como se muestra en la Proposición 5.4 del mismo artículo. En cuanto a encajar un conjunto circular en \mathbb{S}^1 , se tiene el siguiente resultado (que es la Proposición 5.6 de [4]):

Proposición 2.1. *Sea S un conjunto circular separable y con una cantidad numerable de hoyos. Entonces existe una función*

$$f : S \rightarrow \mathbb{S}^1$$

que preserva el orden circular. Más aún, si S es completo, la función f se puede elegir continua y con imagen cerrada.

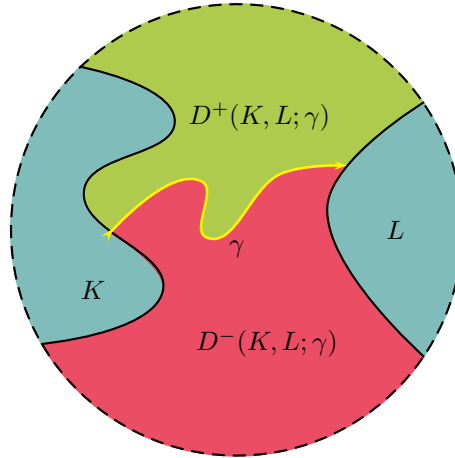
Para la construcción de f se considera un denso numerable $D = \{s_1, s_2, \dots\}$ de S que contenga al conjunto de puntos extremos de los hoyos, y se define f en D inductivamente: primero mandamos s_1 y s_2 a puntos diametralmente opuestos arbitrarios. Luego, mandamos s_n al punto medio del único intervalo $(f(s_i), f(s_j))$ con extremos consecutivos en $\{f(s_1), \dots, f(s_{n-1})\}$, de forma que se preserve el orden circular de $\{s_1, \dots, s_n\}$. Para concluir, se extiende f a cualquier punto de S aproximándolo por puntos de D .

2.3. El orden circular para continuos no acotados del plano

En esta sección consideraremos una colección finita K_1, K_2, \dots, K_n de continuos no acotados de \mathbb{R}^2 , ajenos por pares, y les daremos un orden circular. Diremos que K_1, K_2, \dots, K_n es una *n-ada del plano* si los conjuntos no se separan mutuamente, es decir, cualesquiera $n - 1$ de ellos están en la misma componente

del complemento del restante. Si K_1, K_2, \dots, K_n es una n -ada del plano, hay una única componente del complemento de $K_1 \cup \dots \cup K_n$ cuya frontera interseca a cada K_i , a la que denotaremos $C(K_1, \dots, K_n)$ (ver el Lema 6.1 de [4]). Observemos que $C(K_1, \dots, K_n)$ es un abierto simplemente conexo (porque cada K_i es conexo y no acotado, por lo que está contenido en la componente no acotada del complemento de cualquier lazo contenido en $C(K_1, \dots, K_n)$), así que es homeomorfo a un disco abierto.

Ahora estamos listos para definir el orden circular. Sea K, L, M una terna de continuos no acotados del plano. Consideremos un arco orientado γ que empiece en K , termine en M , y cuyo interior $\dot{\gamma}$ esté contenido en $\mathbb{R}^2 \setminus (K \cup L \cup M)$. Es inmediato que $\dot{\gamma} \subset C(K, M)$. También L está contenido en $C(K, M)$ por el Lema 6.2 de [4]. El Teorema de la Curva de Jordan nos garantiza que γ divide al disco $C(K, M)$ en dos discos. La orientación de γ y la orientación estándar de \mathbb{R}^2 nos permiten distinguir de manera natural a una de las componentes de $C(K, M) \setminus \gamma$ como el *disco positivo*, y a la otra como el *disco negativo*, los cuales serán denotados $D^+(K, M; \gamma)$ y $D^-(K, M; \gamma)$, respectivamente.



Definimos $\langle K, L, M \rangle$ como 1 si $L \subset D^+(K, M; \gamma)$, y como -1 si $L \subset D^-(K, M; \gamma)$. En la Proposición 6.6 de [4] se muestra que $\langle \cdot, \cdot, \cdot \rangle$ no depende de γ y que define un orden circular en cualquier n -ada del plano.

2.4. El círculo universal de una descomposición del plano

Una *descomposición generalizada* de \mathbb{R}^2 es una cubierta del plano por continuos no acotados, con la propiedad de que cualesquiera dos elementos distintos tienen intersección compacta. Cualquier descomposición del plano, por ejemplo \mathcal{D}^+ y \mathcal{D}^- , es una descomposición generalizada. También $\mathcal{D} := \mathcal{D}^+ \cup \mathcal{D}^-$ es descomposición generalizada gracias al Lema 1.10. En esta sección se explicará cómo construir un círculo topológico $\mathbb{S}_{\mathcal{A}}$ partiendo de una descomposición generalizada del plano \mathcal{A} , al cual llamaremos *círculo universal de \mathcal{A}* .

El primer paso es definir un orden circular en el conjunto de finales $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{A})$ de los elementos de \mathcal{A} . Si κ, λ y μ son tres finales distintos, siempre existe un abierto acotado $D \subset P$ tal que $\kappa(D), \lambda(D), \mu(D)$ es una terna del plano. Definimos entonces

$$\langle \kappa, \lambda, \mu \rangle = \langle \kappa(D), \lambda(D), \mu(D) \rangle.$$

Esto no depende de la elección de D , ya que si D' es otro abierto conexo que contiene a D , es evidente que $\langle \kappa(D), \lambda(D), \mu(D) \rangle = \langle \kappa(D'), \lambda(D'), \mu(D') \rangle$ si usamos un mismo arco $\gamma \subset P \setminus D'$ para calcular ambos

números. Con este orden, \mathcal{F} es un conjunto circular; éste es separable (Lema 7.1 de [4]) y tiene una cantidad numerable de hoyos (Lema 7.2 de [4]). Como se mencionó en la Sección 2.2, hay un encaje canónico con imagen densa de \mathcal{F} en un conjunto circular completo $\overline{\mathcal{F}}$, que también es separable (porque \mathcal{F} lo es) y tiene una cantidad numerable de hoyos (por la manera en que se completa un conjunto circular), así que la Proposición 2.1 nos da un homeomorfismo entre $\overline{\mathcal{F}}$ y un subespacio cerrado A de \mathbb{S}^1 . El círculo universal de \mathcal{A} es el espacio cociente que se obtiene de \mathbb{S}^1 al colapsar cada componente de $\mathbb{S}^1 \setminus A$ a un punto.

$$\mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}_{\mathcal{A}}$$

El círculo universal $\mathbb{S}_{\mathcal{A}}$ es homeomorfo a \mathbb{S}^1 porque es imagen monótona de \mathbb{S}^1 (y tiene más de un punto).

2.5. Compactando \mathbb{R}^2 con el círculo universal

Denotaremos \widetilde{F} a la imagen en $\mathbb{S}_{\mathcal{A}}$ de un subconjunto F de \mathcal{F} . Diremos que $K \subseteq \mathbb{R}^2$ está subordinado a \mathcal{A} si existe $\kappa \in \mathcal{F}$ y un $D \subseteq P$ abierto y acotado, tales que $K = \kappa(D)$. Sea $D_{\mathcal{A}} = \mathbb{R}^2 \sqcup \mathbb{S}_{\mathcal{A}}$. Ahora daremos una topología a $D_{\mathcal{A}}$: consideremos dos conjuntos ajenos K y L subordinados a \mathcal{A} y un arco γ de K a L cuyo interior sea ajeno a $K \cup L$. Llamemos $I \subseteq \mathbb{S}_{\mathcal{A}}$ al intervalo abierto máximo que va de $\widetilde{\mathcal{F}}(K)$ a $\widetilde{\mathcal{F}}(L)$ con orientación positiva (esto es posible porque $\widetilde{\mathcal{F}}(K)$ y $\widetilde{\mathcal{F}}(L)$ no están enlazados en $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ por la Proposición 6.9 de [4]). Denotaremos $O(K, L; \gamma)$ al conjunto $I \cup D^+(K, L; \gamma)$. La topología que daremos a $D_{\mathcal{A}}$ es la mínima que tiene como conjuntos abiertos a todos los abiertos de \mathbb{R}^2 y a los conjuntos de la forma $O(K, L; \gamma)$. En [4] se prueba que las inclusiones de $\mathbb{S}_{\mathcal{A}}$ y \mathbb{R}^2 en $D_{\mathcal{A}}$ son encajes (Proposición 7.6), que $D_{\mathcal{A}}$ es homeomorfo a un disco cerrado con frontera $\mathbb{S}_{\mathcal{A}}$ y que todo homeomorfismo de P que preserve \mathcal{A} se extiende a un homeomorfismo de $\widehat{P}_{\mathcal{A}}$ (Teorema 7.9).

2.6. Aplicación a flujos casigeodésicos

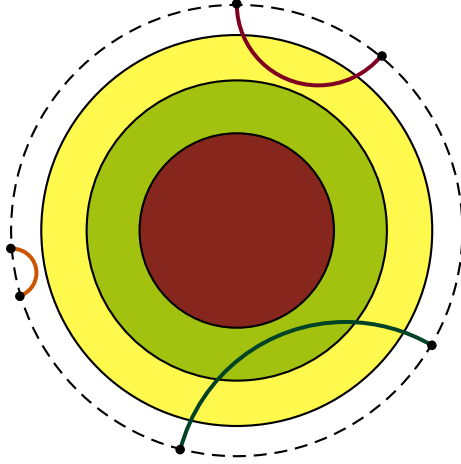
Consideremos nuevamente un flujo casigeodésico φ en una 3-variedad hiperbólica y cerrada M . Las descomposiciones generalizadas \mathcal{D}^+ , \mathcal{D}^- y \mathcal{D} dan lugar a tres círculos universales que denotaremos \mathbb{S}_u^+ , \mathbb{S}_u^- y \mathbb{S}_u . Las acciones de $\pi_1(M)$ en P inducen acciones en estos círculos por homeomorfismos que preservan orientación: primero observemos que cada $g \in \pi_1(M)$ permuta los elementos de \mathcal{D}^+ y \mathcal{D}^- porque e^+ y e^- son $\pi_1(M)$ -equivariantes. También, g permuta los finales de las descomposiciones: si α es un final de $L \in \mathcal{D}^\pm$, definimos $g\alpha$ como el final de gL tal que $(g\alpha)(D) = g(\alpha(g^{-1}D))$ para cualquier $D \subseteq P$ acotado. Adicionalmente, cada $g \in \pi_1(M)$ actúa en P como un homeomorfismo que preserva orientación porque, al ser M orientable, g actúa en \mathbb{H}^3 como una isometría que preserva orientación y la dirección del flujo $\tilde{\varphi}$. Esto significa que g tampoco revierte la orientación de una transversal a $\tilde{\varphi}$; en particular, el homeomorfismo $g : P \rightarrow P$ preserva orientación. De esta manera, cada g induce un automorfismo de conjuntos circulares en $\mathcal{F}(\mathcal{D}^+)$, $\mathcal{F}(\mathcal{D}^-)$ y $\mathcal{F}(\mathcal{D})$, lo que a su vez da lugar a homeomorfismos que preservan orientación en \mathbb{S}_u^+ , \mathbb{S}_u^- y \mathbb{S}_u . A partir de este punto trabajaremos únicamente con \mathbb{S}_u .

Denotaremos \widehat{P} a la compactación de P con frontera \mathbb{S}_u . Los mapeos de punto final se extienden a funciones continuas $\pi_1(M)$ -equivariantes

$$\widehat{e}^+, \widehat{e}^- : \widehat{P} \rightarrow \mathbb{S}_\infty^2,$$

que coinciden en \mathbb{S}_u (ver el Teorema 2.10 de [6]). Para convencerse de esto último, consideremos una sucesión $(p_m)_m$ en P que converja a $z \in \mathbb{S}_u$. Pensemos a \mathbb{H}^3 en el modelo de la bola \mathbb{B}^3 y, para $s > 0$, sea $K_s \subseteq P$ la imagen bajo π de la bola hiperbólica cerrada de radio s centrada en $x_0 = (0, 0, 0)$. La sucesión $(p_m)_m$ escapa de cada compacto K_s a partir de algún momento. Si $\pi^{-1}(p_m) \cap \overline{B}(x_0, s) = \emptyset$, entonces la

geodésica que tiene los mismos extremos que $\pi^{-1}(p_m)$ es ajena a $\overline{B}(x_0, s - D)$ (siendo D una constante que acote la distancia de Hausdorff entre ℓ y ℓ_g para cualquier órbita ℓ de $\tilde{\varphi}$), por lo que la distancia euclidiana entre $e^+(p_m)$ y $e^-(p_m)$ tiende a 0 cuando $m \rightarrow \infty$. Entonces $\hat{e}^+(z) = \hat{e}^-(z)$.



Geodésicas con extremos cada vez más cercanos

Para subconjuntos A y B de \mathbb{S}_∞^2 definimos los conjuntos:

$$\langle A \rightarrow \rangle = (\hat{e}^-)^{-1}(A), \quad \langle \rightarrow B \rangle = (\hat{e}^+)^{-1}(B), \quad \langle A \rightarrow B \rangle = \langle A \rightarrow \rangle \cap \langle \rightarrow B \rangle.$$

Las funciones \hat{e}^+ y \hat{e}^- determinan dos descomposiciones de \hat{P} en conjuntos compactos:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{D}}^+ &= \{\text{componentes de } \langle \rightarrow z \rangle \mid z \in \hat{e}^+(P)\}, \\ \hat{\mathcal{D}}^- &= \{\text{componentes de } \langle z \rightarrow \rangle \mid z \in \hat{e}^-(P)\}. \end{aligned}$$

Llamaremos a los elementos de estas descomposiciones *hojas extendidas positivas* y *hojas extendidas negativas*, respectivamente. Diremos que una hoja extendida es trivial si está contenida en \mathbb{S}_u . Observemos que cada hoja extendida no trivial \hat{K} es la cerradura en \hat{P} de una familia de hojas (en \mathcal{D}^+ o \mathcal{D}^-), por lo tanto $\hat{K} \cap \mathbb{S}_u \neq \emptyset$ (las hojas son no acotadas); denotaremos $\partial_u \hat{K}$ a este último conjunto y llamaremos *puntos extremos* de \hat{K} a sus elementos. Las componentes de $\partial_u \hat{K}$ son puntos o intervalos cerrados; para el capítulo siguiente será conveniente que estas componentes sean puntos, cosa que podemos arreglar de la siguiente manera: sea \hat{e} a la restricción de \hat{e}^+ (o \hat{e}^-) a \mathbb{S}_u . Vamos a considerar el espacio X que se obtiene de \hat{P} al colapsar cada componente de cada $\hat{e}^{-1}(z)$, $z \in \mathbb{S}_\infty^2$. X es también homeomorfo a un disco, además, las funciones \hat{e}^+ , \hat{e}^- y la acción de $\pi_1(M)$ en \hat{P} descienden a X . Para no introducir más notación, de ahora en adelante llamaremos \hat{P} a X , \mathbb{S}_u a la frontera de X y también usaremos la misma notación para las funciones de punto final extendidas. De esta manera conseguimos que $\partial_u \hat{K}$ sea totalmente desconexo para cualquier hoja extendida positiva o negativa \hat{K} (en particular, las hojas triviales tienen solamente un punto).

Cerramos esta sección y el capítulo con dos resultados que usaremos en el Capítulo 3; para la prueba del segundo necesitamos dos definiciones. La *esfera universal* de un flujo casigeodésico, que denotaremos \mathbb{S}_u^2 , se obtiene a partir de dos copias $\hat{P}^+ = \hat{P} \times \{+\}$ y $\hat{P}^- = \hat{P} \times \{-\}$ de \hat{P} , identificando puntos correspondientes de sus fronteras $(x, +) \sim (x, -)$. Las funciones \hat{e}^+ y \hat{e}^- inducen una función continua $\tilde{e} : \mathbb{S}_u^2 \rightarrow \mathbb{S}_\infty^2$. Llamaremos *hoja maestra* a los subconjuntos de \mathbb{S}_u^2 de la forma $\tilde{e}^{-1}(z)$. Las hojas maestras son compactas, conexas y no separan a \mathbb{S}_u^2 (Lema 4.6 de [5]).

Lema 2.2. Si $\widehat{K} \in \widehat{\mathcal{D}}^+$ y $\widehat{L} \in \widehat{\mathcal{D}}^-$ se intersecan en P , entonces $\partial_u \widehat{K}$ y $\partial_u \widehat{L}$ son ajenos.

Demostración. Si \widehat{K} y \widehat{L} tienen un punto en común $p \in \mathbb{S}_u$, para cualquier $q \in \widehat{K} \cap \widehat{L}$ se cumple que

$$\widehat{e}^+(q) = \widehat{e}^+(p) = \widehat{e}^-(p) = \widehat{e}^-(q).$$

Como las casigeodésicas tienen puntos extremos distintos, q debe estar también en \mathbb{S}_u . \square

Lema 2.3. Si $\widehat{K} \in \widehat{\mathcal{D}}^+$ y $\widehat{L} \in \widehat{\mathcal{D}}^-$, entonces $\partial_u \widehat{K}$ y $\partial_u \widehat{L}$ tienen a lo más un punto en común.

Demostración. Necesitaremos el siguiente resultado clásico de topología de la esfera (ver la Proposición 26.3.2 de [3]): Si A y B son subconjuntos compactos y conexos de \mathbb{S}^2 con intersección disconexa, entonces $A \cup B$ separa a la esfera.

Pensemos a \widehat{K} y \widehat{L} en su respectivo hemisferio de \mathbb{S}_u^2 . La intersección de \widehat{K} y \widehat{L} es totalmente disconexa (es igual a $\partial_u \widehat{K} \cap \partial_u \widehat{L}$), por lo que $\widehat{K} \cup \widehat{L}$ separa a \mathbb{S}_u^2 si \widehat{K} y \widehat{L} tienen más de un punto en común. Si esto sucede, $\widehat{K} \cup \widehat{L}$ está contenido en una hoja maestra $Z = \tilde{e}^{-1}(z)$. El conexo

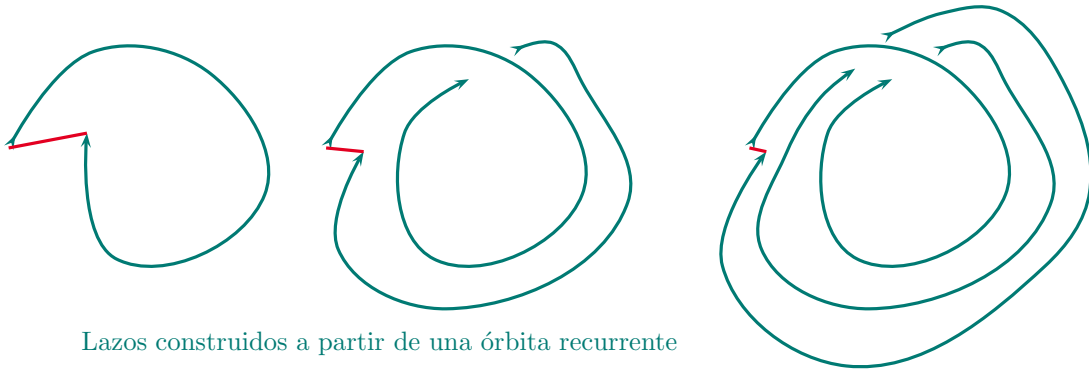
$$\mathbb{S}_u^2 \setminus Z = \tilde{e}^{-1}(\mathbb{S}_u^2 \setminus \{z\})$$

está contenido en una componente V de $\mathbb{S}_u^2 \setminus (\widehat{K} \cup \widehat{L})$. Cualquier otra componente W del complemento de $\widehat{K} \cup \widehat{L}$ es mandada a z bajo \tilde{e} , y como $\overline{W} \cap (\widehat{K} \cup \widehat{L}) \neq \emptyset$, entonces \widehat{K} está contenida propiamente en una hoja extendida positiva o \widehat{L} en una hoja extendida negativa, cosa que no es posible. \square

Capítulo 3

Órbitas cerradas en flujos casigeodésicos

En el capítulo final de este trabajo presentaremos la solución que S. Frankel da en [5] al Problema de la Órbita Cerrada para Flujos Casigeodésicos. La idea central es fijarse en un punto recurrente de φ , digamos x_0 , y en puntos $x_t = \varphi(t, x_0)$ cada vez más cercanos a x_0 para formar un lazos γ_t cerrando el segmento $\varphi([0, t] \times \{x_0\})$ con una trayectoria de x_t a x_0 . Resulta que si t es suficientemente grande, hay una órbita cerrada de φ que representa la clase de homotopía libre de γ_t . Este resultado es al que Frankel llama *Lema Homotópico de Cerrado*, y para la demostración se distinguen dos casos (que explicaremos más adelante). Por falta de espacio, en este trabajo se incluye únicamente uno de dichos casos en el Lema 3.5; no obstante, esto bastará para apreciar las ideas e ingredientes esenciales involucrados en la solución de Frankel. La teoría necesaria para este capítulo ha sido ya presentada en los primeros dos, con excepción de una breve discusión de la clasificación de las isometrías de \mathbb{H}^3 , así como y algunos conceptos básicos de Sistemas Dinámicos y descomposiciones semicontinuas superiormente que se incluyen aquí.



Lazos contruidos a partir de una órbita recurrente

Antes de abordar el problema general, retomemos nuestro ejemplo del Capítulo 1: M es la suspensión de un difeomorfismo pseudo-Anosov ψ de una superficie hiperbólica, cerrada y orientable S en sí misma, y φ es cualquier flujo transverso a la foliación natural de M . La existencia de una órbita peroódica en esta situación es consecuencia inmediata del lema siguiente:

Lema 3.1. *Cualquier homeomorfismo de una superficie orientable y cerrada S de género al menos dos en sí misma tiene puntos periódicos.*

Demostración. Supongamos primero que f preserva orientación. Entonces el homomorfismo inducido

$$f_* : H_n(S; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(S; \mathbb{Z})$$

es la identidad para $n = 0, 2$. Llamemos T a $f_* : H_1(S; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(S; \mathbb{Z})$; sean $\lambda_1, \dots, \lambda_{2g}$ los valores propios de T . Si f no tuviera puntos periódicos, del Teorema del Punto Fijo de Lefschetz (ver el Teorema 2C.3 de [9]) se seguiría que el número de Lefschetz de f^k es 0 para todo $k > 0$, es decir,

$$\lambda_1^k + \dots + \lambda_{2g}^k = \text{tr}(T^k) = 2 = 1^k + 1^k + 0^k + \dots + 0^k,$$

lo que nos da la igualdad de polinomios

$$(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_{2g}) = (x - 1)^2 x^{2g-2},$$

y como $g \geq 2$, algún λ_m es 0; así, T no sería invertible. Esto no es posible porque f es homeomorfismo. Si f invierte orientación, entonces f^2 la preserva y aplicamos el argumento anterior. \square

Pasemos ahora al Problema de la Órbita Cerrada para cualquier flujos casigeodésicos φ en una 3-variedad hiperbólica, cerrada y orientable M . La primera observación clave es que éste se puede plantear como un problema de punto fijo en P , cosa que será de gran ayuda porque nos permitirá usar teoría de dinámica en el plano.

Lema 3.2. *Un flujo casigedésico φ en M tiene una órbita cerrada si y sólo si algún $g \in \pi_1(M)$ no trivial tiene un punto fijo en el plano P .*

Demostración. Si $g \in \pi_1(M) \setminus \{e\}$ fija una órbita ℓ de $\tilde{\varphi}$, para cada punto \tilde{x} de ℓ , el segmento de ℓ de \tilde{x} a $g(\tilde{x})$ se proyecta a una órbita cerrada de φ . Ahora supongamos que la órbita de $x \in M$ bajo φ es periódica y que ℓ es uno de sus levantamientos. Para cualesquiera puntos \tilde{x}_1 y \tilde{x}_2 de ℓ que se proyecten a x , la transformación cubriente que manda \tilde{x}_1 a \tilde{x}_2 fija a ℓ . \square

Si una transformación cubriente (que no sea la identidad) fija algún punto de P , diremos que ésta *representa una órbita cerrada de φ* . Buscamos entonces una órbita de $\tilde{\varphi}$ fijada por una transformación cubriente de M , para lo cual será útil saber qué tipo de isometría de \mathbb{H}^3 son éstas. Haremos un paréntesis para presentar rápidamente la clasificación y algunas propiedades básicas de las isometrías de \mathbb{H}^3 que preservan orientación. A partir de ahora, cuando hagamos referencia a una isometría de \mathbb{H}^3 , supondremos implícitamente que preserva orientación. En el modelo de \mathbb{H}^3 del semiespacio superior, el espacio hiperbólico de dimensión 3 está representado por $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$, y su frontera $(\mathbb{C} \times \{0\}) \cup \{\infty\}$ se identifica con el plano complejo extendido $\hat{\mathbb{C}}$. Recordemos que una *transformación de Möbius* de $\hat{\mathbb{C}}$ es una función $\mu : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ de la forma

$$\mu(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

para algunos $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ con $ad - bc \neq 0$. Las transformaciones de Möbius con la composición forman un grupo que denotaremos Möb. Resulta que $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ y Möb se identifican de manera natural: cada isometría de \mathbb{H}^3 tiene una única extensión continua a $\overline{\mathbb{H}^3}$, cuya restricción a $\hat{\mathbb{C}}$ es una transformación de Möbius; inversamente, toda transformación de Möbius es la restricción de una isometría positiva de \mathbb{H}^3 .

Clasificaremos las isometrías de \mathbb{H}^3 en tres familias. Recordemos que cada transformación de Möbius no trivial tiene exactamente uno o dos puntos fijos; por lo tanto, toda $f \in \text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ fija uno o dos puntos en $\hat{\mathbb{C}}$. Si f fija a $w, z \in \hat{\mathbb{C}}$, a la geodésica con estos extremos se le conoce como *eje* de f . Siempre podemos conjugar f por alguna isometría g tal que los puntos fijos de $gf g^{-1}$ en $\hat{\mathbb{C}}$ sean 0 e ∞ ; por comodidad supondremos que f fija a 0 e ∞ . De esta forma, la acción de f en $\hat{\mathbb{C}}$ es una simple multiplicación por un $\kappa \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Si $|\kappa| \neq 1$, diremos que f es una *isometría hiperbólica*; cualquier isometría hiperbólica actúa

como una traslación no trivial en su eje, y uno de los extremos de éste es atractor y el otro repulsor. Si $|\kappa| = 1$, diremos que f es una *isometría elíptica*; éstas fijan cada punto de su eje y los extremos de éste son puntos indiferentes (ni atractores ni repulsores). Cuando f fija sólo un punto en $\widehat{\mathbb{C}}$ (pensemos que es ∞), diremos que es una *isometría parabólica*; la acción de f en $\widehat{\mathbb{C}}$ es una traslación.

Una manera de determinar a qué familia pertenece una isometría f es mediante su *distancia de traslación* D_f , que se define como el ínfimo de los valores $d(x, f(x))$ para $x \in \mathbb{H}^3$.

1. Si $D_f > 0$, el ínfimo de $d(x, f(x))$ se alcanza y f es hiperbólica. El conjunto de puntos de \mathbb{H}^3 en los que se alcanza D_f es precisamente el eje.
2. Si $D_f = 0$ y el ínfimo se alcanza, entonces f es elíptica. Nuevamente, el eje de f es el conjunto de puntos en los que D_f se alcanza.
3. Si $D_f = 0$ y el ínfimo no se alcanza, entonces f es parabólica.

Estamos listos para determinar qué tipo de isometrías son las transformaciones cubrientes de M .

Lema 3.3. *Las transformaciones cubrientes no triviales de una 3-variedad hiperbólica, cerrada y orientable M son isometrías hiperbólicas de \mathbb{H}^3 .*

Demostración. Sea $f \neq \text{Id}$ una transformación cubriente de M . Para cada punto x de M , consideremos un levantamiento \tilde{x} a \mathbb{H}^3 . La función $M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto d(\tilde{x}, f(\tilde{x}))$ está bien definida (no depende de \tilde{x}) y es continua, y como M es compacta, alcanza su mínimo (que justo es D_f). La única transformación cubriente que tiene puntos fijos es la identidad, así que $D_f > 0$. Por lo tanto f es hiperbólica. \square

Esta información geométrica nos permite dar una condición que garantiza la existencia de una órbita cerrada de φ .

Proposición 3.4. *Si el eje de algún $g \in \pi_1(M)$ no trivial comparte un extremo con una órbita de $\tilde{\varphi}$, entonces φ tiene una órbita cerrada.*

Demostración. Denotemos z_a y z_r a los extremos atractor y repulsor del eje E de g . Supongamos que la órbita ℓ de $\tilde{\varphi}$ comparte un extremo con E ; sea $p \in P$ el punto correspondiente a ℓ . Consideremos primero el caso en el que $e^-(p) = z_r$. La órbita $g^n(\ell)$ tiene extremos z_r y $g^n(z)$, en donde $z = e^+(p)$. Los puntos $g^n(z)$ convergen al punto atractor z_a cuando $n \rightarrow \infty$, así que

$$K = \{z_a\} \cup \{g^n(z) \mid n \geq 0\}$$

es compacto; además, $z_r \notin K$ porque los extremos de $g^n(\ell)$ son distintos. Entonces $\{g^n(p) \mid n \geq 0\}$ está contenido en $\{z_r \rightarrow K\}$, que es compacto por el Lema 1.10. Del Teorema de Traslación del Plano de Brouwer (ver el Teorema 2.2 de [7]) se sigue que g tiene un punto fijo en P y entonces φ tiene una órbita cerrada.

El caso en el que $e^+(p) = z_r$ es similar: ahora $\{g^n(p) \mid n \geq 0\} \subseteq \{K \rightarrow z_r\}$ y se concluye de la misma forma. Finalmente, si z_a es extremo de ℓ , el mismo argumento funciona cambiando g por g^{-1} (ya que para g^{-1} , z_r es atractor y z_a es repulsor). \square

Necesitamos más definiciones y algo de notación. El conjunto ω -límite de un punto x de M , que denotaremos $\omega(x)$, se define como el conjunto de los $y \in M$ que son límite de una sucesión de la forma $(\varphi(t_n, x))_n$, para algunos tiempos $(t_n)_n$ que se van a infinito. Observemos que $\omega(x)$ es no vacío (M es compacta) y φ -invariante (si $\varphi(t_n, x) \rightarrow y$, entonces $\varphi(t + t_n, x) = \varphi(t, \varphi(t_n, x)) \rightarrow \varphi(t, y)$). Cualesquiera dos puntos en la misma órbita tienen el mismo ω -límite (si $\varphi(t_n, x) \rightarrow y$, entonces $\varphi(t_n - t, \varphi(t, x)) \rightarrow y$), lo que nos permite hablar del ω -límite de una órbita ℓ . De la φ -invariancia se sigue que $y \in \omega(x)$ es

equivalente a que el ω -conjunto límite de la órbita de y esté contenido en el de la órbita de x . Sean ℓ_1 y ℓ_2 órbitas de φ correspondientes a $p, q \in P$. La notación $q \in \omega(p)$ significa que $\ell_2 \subseteq \omega(\ell_1)$; si esto pasa, hay una sucesión de puntos $x_n \in \pi^{-1}(p)$ que converge a $e^+(p)$ y transformaciones cubrientes g_n de M tales que $(g_n(x_n))_n$ converge a un punto de $\pi^{-1}(q)$. A una sucesión $(g_n)_n$ con estas características la llamaremos ω -sucesión para $q \in \omega(p)$. Por último, una *órbita recurrente* de φ es una órbita ℓ que está contenida en su ω -límite. Diremos que un punto de P es recurrente si su correspondiente órbita de φ es recurrente.

Consideremos un espacio métrico compacto (X, d) . La familia de subconjuntos cerrados y no vacíos de X (que denotaremos $K(X)$) equipada con la métrica de Hausdorff es también un espacio métrico compacto (ver el Teorema 4.2 de [12]). Los límites superior e inferior de una sucesión $(A_n)_n$ de subconjuntos de X se definen como

$$\begin{aligned}\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n &= \{x \in X \mid \text{toda vecindad de } x \text{ interseca a infinitos } A_n\}, \\ \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n &= \{x \in X \mid \text{toda vecindad de } x \text{ interseca a } A_n \text{ para } n \gg 0\}.\end{aligned}$$

Una sucesión en $K(X)$ converge en la métrica de Hausdorff si y sólo si sus límites superior e inferior coinciden. Una *descomposición semicontinua superiormente* de X es una partición \mathcal{A} de X en subconjuntos cerrados que cumple cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

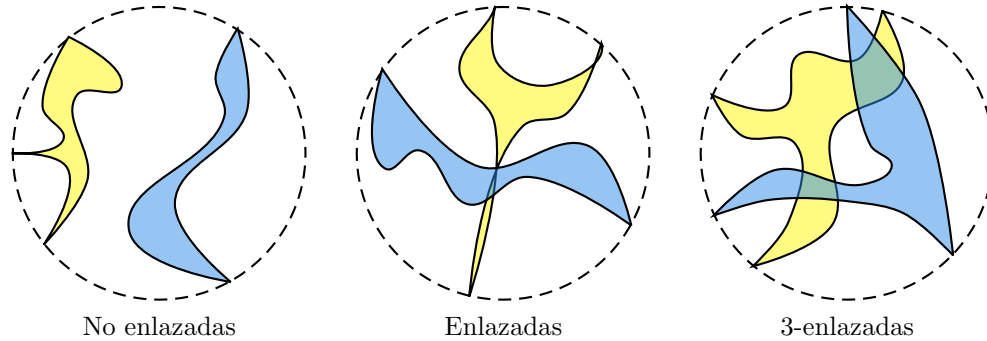
1. Para cualquier abierto U de X , la unión de los elementos de \mathcal{A} contenidos en U es un conjunto abierto.
2. Para cualquier cerrado F de X , la unión de los elementos de \mathcal{A} que intersecan a F es un conjunto cerrado.
3. Para cualesquiera $A, A_n \in \mathcal{A}$, si $A \cap \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \neq \emptyset$, entonces $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \subseteq A$.

Si f es una función continua de X a un espacio Hausdorff Y , la descomposición

$$\mathcal{A}_f = \{f^{-1}(y) \mid y \in f(X)\}$$

resulta ser semicontinua superiormente. Adicionalmente, si \mathcal{A} es una descomposición de X semicontinua superiormente, la descomposición formada por las componentes de los elementos de \mathcal{A} también es semicontinua superiormente (ver la sección 3-6 de [10]). Como las funciones \widehat{e}^+ y \widehat{e}^- son continuas, esto implica que $\widehat{\mathcal{D}}^+$ y $\widehat{\mathcal{D}}^-$ son descomposiciones de \widehat{P} semicontinuas superiormente.

Como ya hemos mencionado, las hojas extendidas \widehat{K} y \widehat{L} correspondientes a un punto de P no tienen puntos extremos en común. Notemos que si $\partial_u \widehat{K}$ intersecara una infinidad de componentes I_1, I_2, \dots de $\mathbb{S}_u \setminus \partial_u \widehat{L}$, como la longitud de los I_n tiende a 0 (porque son ajenos), podríamos encontrar sucesiones $(k_n)_n$ y $(l_n)_n$ de $\partial_u \widehat{K}$ y $\partial_u \widehat{L}$ convergiendo el mismo punto, lo que nos diría que $\partial_u \widehat{K} \cap \partial_u \widehat{L} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\partial_u \widehat{K}$ interseca sólo a una cantidad finita n de componentes de $\mathbb{S}_u \setminus \partial_u \widehat{L}$; diremos entonces que \widehat{K} y \widehat{L} están n -enlazadas, y cuando $n \geq 2$, en ocasiones diremos simplemente que \widehat{K} y \widehat{L} están enlazadas.



Finalmente estamos listos para enunciar el Lema Homotópico de Cerrado: si un punto recurrente $p \in P$ tiene hojas extendidas enlazadas, todos los términos, salvo tal vez una cantidad finita, de una ω -sucesión para $p \in \omega(p)$ representan una órbita cerrada de φ . La prueba se divide en dos casos: cuando \widehat{K} y \widehat{L} están ≥ 3 -enlazadas y cuando están 2-enlazadas. Aquí presentaremos solamente la demostración del primer caso. El lector interesado en la prueba para hojas 2-enlazadas puede consultar [5, Proposición 5.7].

Lema 3.5. *Sean p un punto recurrente de P con hojas extendidas ≥ 3 -enlazadas, y $(g_n)_n$ una ω -sucesión para $p \in \omega(p)$. Entonces g_n representa una órbita cerrada para n suficientemente grande.*

Demostración. Sean \widehat{K} y \widehat{L} las hojas extendidas positiva y negativa de p , y consideremos $\widehat{K}_n = g_n(\widehat{K})$ y $\widehat{L}_n = g_n(\widehat{L})$. Tomemos una sucesión $(x_n)_n$ en $\pi^{-1}(p)$ que converja a $e^+(p)$ y que cumpla que

$$g_n(x_n) \rightarrow x_\infty \in \pi^{-1}(p).$$

Observemos que si $\widehat{K}_n = \widehat{K}$, la órbita $\pi^{-1}(p)$ compartiría su extremo positivo con el eje de g_n ; entonces g_n representaría una órbita cerrada por el Lema 3.4.

Supongamos que sólo finitos g_n representan órbitas cerradas de φ . Tomando una subsucesión y renombrando los índices podemos suponer que ningún g_n representa una órbita cerrada, y que las sucesiones $(\widehat{K}_n)_n$ y $(\widehat{L}_n)_n$ convergen (con respecto a la métrica de Hausdorff) a \widehat{K}_∞ y \widehat{L}_∞ . Notemos que $\widehat{K}_\infty \subseteq \widehat{K}$ ya que $\widehat{\mathcal{D}}^+$ es semicontinua superiormente, $g_n(p) \in \widehat{K}_n$ y

$$g_n(p) = g_n(\pi(x_n)) = \pi(g_n(x_n)) \rightarrow \pi(x_\infty) = p.$$

De la misma manera se prueba que \widehat{L}_∞ esta contenido en \widehat{L} .

La sucesión $(\widehat{K}_n)_n$ visita solamente finitas componentes complementarias de \widehat{K} . Si visitara una infinidad, tomando una subsucesión, podemos suponer que siempre visita componentes distintas. Llamemos U_n a la componente complementaria de \widehat{K} que contiene a \widehat{K}_n . Algún extremo de \widehat{L}_n debe estar en $\partial_u U_n$ porque \widehat{K}_n y \widehat{L}_n están enlazadas, y $\partial_u \widehat{K}_n \subseteq \partial_u U_n$. Los intervalos $\partial_u U_n \subset \mathbb{S}_u$ son ajenos, así que su longitud tiende a 0. Esto nos dice que hay puntos $k_n \in \partial_u \widehat{K}_n$ y $l_n \in \partial_u \widehat{L}_n$ que convergen a lo mismo. Entonces

$$\emptyset \neq \partial_u \widehat{K}_\infty \cap \partial_u \widehat{L}_\infty \subseteq \partial_u \widehat{K} \cap \partial_u \widehat{L},$$

cosa que no puede pasar por el Lema 2.2

Podemos entonces suponer que todos los \widehat{K}_n están contenidos en la misma componente complementaria U de \widehat{K} . Sean $k_1, k_2 \in \widehat{K}$ los extremos de $\partial_u U$. Como $\widehat{K}_\infty \subseteq \widehat{K}$, es inmediato que $\partial_u \widehat{K}_\infty \subseteq \{k_1, k_2\}$. Consideremos dos sucesiones $(I_n)_n$ y $(J_n)_n$ de intervalos abiertos, anidados, que tengan a k_1 y k_2 , respectivamente, y con longitudes que tiendan a 0. Para cada n , $\partial_u \widehat{K}_i$ está contenido en $I_n \cup J_n$ para $i \gg 0$. Si I_n y J_n son ajenos, al menos un extremo de \widehat{L}_n está en $I_n \cup J_n$ porque \widehat{K}_i y \widehat{L}_i están ≥ 3 -enlazados. Hay entonces una sucesión $r_i \in \partial_u \widehat{L}_i$ que converge a k_1 o a k_2 , lo cual es imposible pues $\partial_u \widehat{K}$ y $\partial_u \widehat{L}$ son ajenos. \square

Concluimos este trabajo probando en cuatro pasos la existencia de un punto recurrente con hojas extendidas enlazadas.

Lema 3.6. *Hay al menos una hoja extendida positiva con más de un extremo.*

Demostración. Supongamos que todas las hojas extendidas positivas tienen un solo extremo. Llamemos $r : \widehat{P} \rightarrow \mathbb{S}_u$ a la función que manda a cada punto de \widehat{P} al extremo de su hoja extendida positiva. La función r es continua: si $p_i \rightarrow p$, entonces

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \widehat{\mathcal{D}}^+(p_n) \subseteq \widehat{\mathcal{D}}^+(p),$$

porque $\widehat{\mathcal{D}}^+$ es semicontinua superiormente. Si una subsucesión $(r(p_{i_j}))_j$ converge a $z \in \mathbb{S}_u$, necesariamente $z \in \widehat{\mathcal{D}}^+(p)$, así que $z = r(p)$. Esto prueba que $r(p_n) \rightarrow r(p)$. Como r deja fijos los puntos de \mathbb{S}_u , entonces es una retracción del disco \widehat{P} en su frontera, lo cual es imposible. \square

Lema 3.7. *Sean \widehat{K} una hoja extendida positiva y U una componente complementaria de \widehat{K} . Todo punto $p \in U$ se puede separar de \widehat{K} con una hoja extendida positiva.*

Demostración. Consideremos un arco γ que separe a \widehat{K} y $\widehat{\mathcal{D}}^+(p)$. El conjunto

$$C = \bigcup_{q \in \gamma} \widehat{\mathcal{D}}^+(q)$$

es compacto (por la definición 2 de descomposición semicontinua superiormente), conexo y separa a \widehat{K} de $\widehat{\mathcal{D}}^+(p)$. Los puntos extremos de U forman un intervalo abierto (k, k') de \mathbb{S}_u para algunos $k, k' \in \widehat{K}$. Sean b y b' el primer y último punto de C en (k, k') . Hay una componente V de $\widehat{P} \setminus (\widehat{K} \cup C)$ que cumple que $\partial_u V = (k, b) \cup (b', k')$, que es justamente la componente que está entre \widehat{K} y C . El subconjunto conexo $F = \overline{V} \cap C$ separa a \widehat{K} y $\widehat{\mathcal{D}}^+(p)$; para concluir la prueba mostraremos que F está contenido en una hoja extendida positiva. Si $(x_n)_n$ es una sucesión en V que converge a un punto $x \in F$, entonces $\overline{\lim} \widehat{\mathcal{D}}^+(x_n) \cap \widehat{\mathcal{D}}^+(x) \neq \emptyset$, y en consecuencia $\overline{\lim} \widehat{\mathcal{D}}^+(x_n) \subseteq \widehat{\mathcal{D}}^+(x)$. Tomemos ahora un punto extremo y_n de cada $\widehat{\mathcal{D}}^+(x_n)$ y una subsucesión $(y_{n_k})_k$ que converja a un punto $y_\infty \in \mathbb{S}_u$. Este punto está en $\widehat{\mathcal{D}}^+(x)$ porque pertenece a $\overline{\lim} \widehat{\mathcal{D}}^+(x_n)$, así que es b o b' . Como $F \subseteq \widehat{\mathcal{D}}^+(b) \cup \widehat{\mathcal{D}}^+(b')$, estas dos hojas deben ser la misma, de lo contrario separarían a F en dos cerrados ajenos, contradiciendo el hecho de que F es conexo. \square

Lema 3.8. *Hay un punto q de P con hojas extendidas enlazadas.*

Demostración. Sea \widehat{K} una hoja extendida positiva con al menos dos puntos extremos k y k' . El punto k' no pertenece a $\widehat{\mathcal{D}}^-(k)$ por el Lema 2.3, así que hay una hoja extendida negativa \widehat{L} que separa a k' y $\widehat{\mathcal{D}}^-(k)$. Cualquier punto en la intersección de \widehat{K} y \widehat{L} tiene hojas extendidas enlazadas. \square

Lema 3.9. *Hay un punto recurrente $p \in P$ con hojas extendidas enlazadas.*

Demostración. Sean q un punto de P con hojas extendidas enlazadas y $\ell \subseteq M$ su órbita correspondiente. El conjunto invariante $\omega(\ell)$ contiene un subconjunto cerrado invariante mínimo \mathcal{M} . Cualquier órbita $\ell_1 \subseteq \mathcal{M}$ es densa en \mathcal{M} , así que es recurrente. Sea $p \in P$ correspondiente a un levantamiento a \mathbb{H}^3 de ℓ_1 . Si $(g_n)_n$ es una ω -sucesión para $q \in \omega(p)$, entonces

$$\overline{\lim} \widehat{\mathcal{D}}^\pm(g_n(q)) \subseteq \widehat{\mathcal{D}}^\pm(p),$$

y como $\widehat{\mathcal{D}}^+(q)$ y $\widehat{\mathcal{D}}^-(q)$ están enlazadas, entonces $\widehat{\mathcal{D}}^+(p)$ y $\widehat{\mathcal{D}}^-(p)$ lo están también. \square

Bibliografía

- [1] M.R. Bridson and A. Häfliger. *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [2] Danny Calegari. Universal circles for quasigeodesic flows. *Geometry and Topology*, 10:2271–2298 (electronic), 2006.
- [3] E. Čech. *Point sets*. Academic Press, 1969.
- [4] Steven Frankel. Quasigeodesic flows and Möbius-like groups. *Journal of Differential Geometry*, 93(3):401–429, 2013.
- [5] Steven Frankel. Coarse hyperbolicity and closed orbits for quasigeodesic flows. *arXiv:1507.04320 [math]*, July 2015. arXiv: 1507.04320.
- [6] Steven Frankel. Quasigeodesic flows and sphere-filling curves. *Geometry & Topology*, 19(3):1249–1262, 2015.
- [7] John Franks. A new proof of the Brouwer plane translation theorem. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 12(2):217–226, 1992.
- [8] S.M. Gersten. *Essays in group theory*. Mathematical Sciences Research Institute publications. Springer-Verlag, 1987.
- [9] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [10] J.G. Hocking and G.S. Young. *Topology*. Addison-Wesley series in mathematics. Dover Publications, 1961.
- [11] D. Husemöller. *Fibre Bundles*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1994.
- [12] Alejandro Illanes Mejía. *Hiperespacios de continuos*, volume 28 of *Aportaciones Matemáticas: Textos [Mathematical Contributions: Texts]*. Sociedad Matemática Mexicana, México, 2004.
- [13] M. Kapovich. *Hyperbolic Manifolds and Discrete Groups*. Hyperbolic Manifolds and Discrete Groups. Birkhäuser Boston, 2001.
- [14] Greg Kuperberg. A volume-preserving counterexample to the Seifert conjecture. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 71(1):70–97, 1996.
- [15] Krystyna Kuperberg. A smooth counterexample to the Seifert conjecture. *Annals of Mathematics. Second Series*, 140(3):723–732, 1994.

- [16] J.M. Lee. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2006.
- [17] J. Ratcliffe. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013.
- [18] Ana Rechtman. Existence of periodic orbits for geodesible vector fields on closed 3-manifolds. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 30(6):1817–1841, December 2010.
- [19] Paul A. Schweitzer. Counterexamples to the Seifert Conjecture and Opening Closed Leaves of Foliations. *Annals of Mathematics*, 100(2):386–400, 1974.
- [20] Herbert Seifert. Closed Integral Curves in 3-Space and Isotopic Two-Dimensional Deformations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1(3):287–302, 1950.
- [21] Clifford Henry Taubes. The Seiberg-Witten equations and the Weinstein conjecture. *Geometry & Topology*, 11:2117–2202, 2007.
- [22] William P. Thurston. Hyperbolic Structures on 3-manifolds, II: Surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle. *arXiv:math/9801045*, January 1998. arXiv: math/9801045.
- [23] W.P. Thurston and S. Levy. *Three-dimensional Geometry and Topology*. Number v. 1 in Luis A.Caffarelli. Princeton University Press, 1997.
- [24] G.T. Whyburn. *Analytic Topology*. Number v. 28, pt. 2 in American Mathematical Society. Colloquium publications. American Mathematical Soc., 1948.
- [25] A. Zeghib. Sur les feuilletages géodésiques continus des variétés hyperboliques. *Inventiones mathematicae*, 114(1):193–206, December 1993.