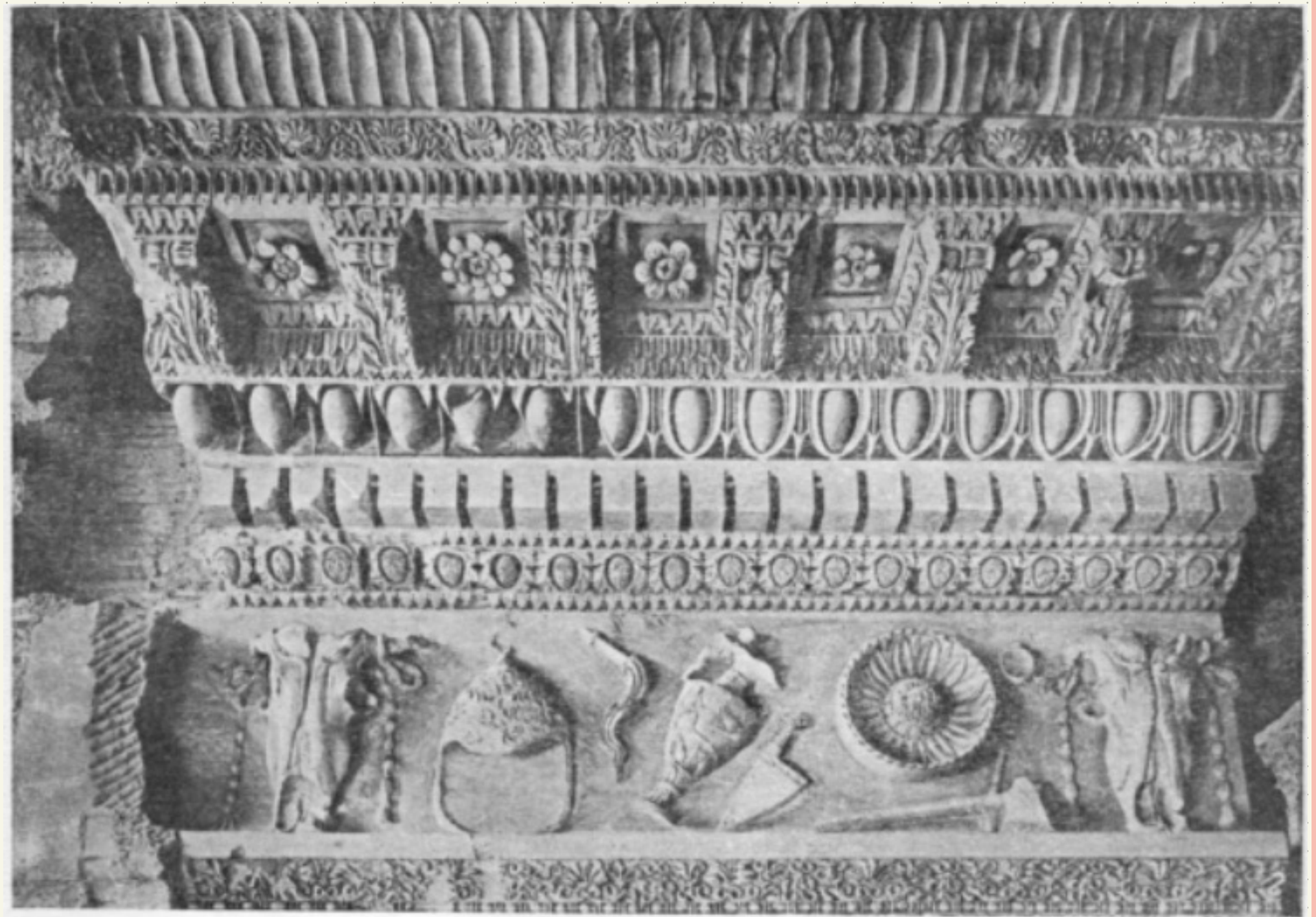


12

ϕ puzzle

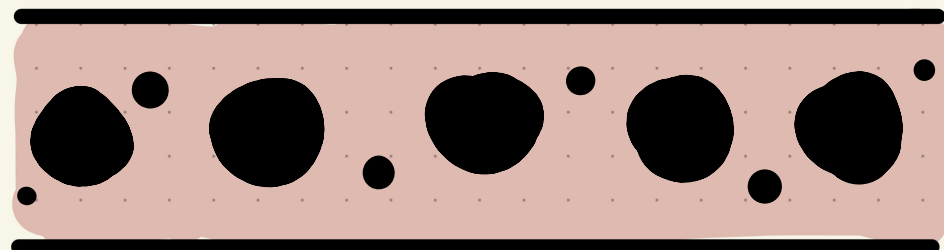
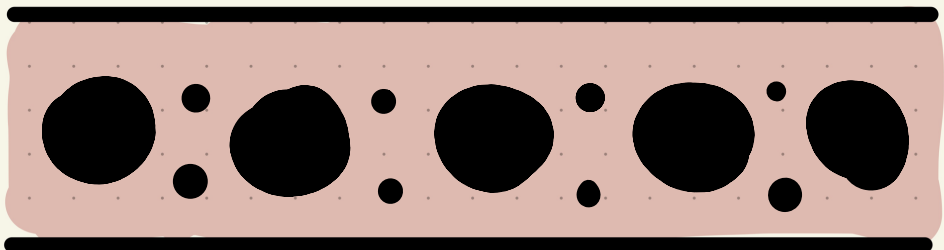
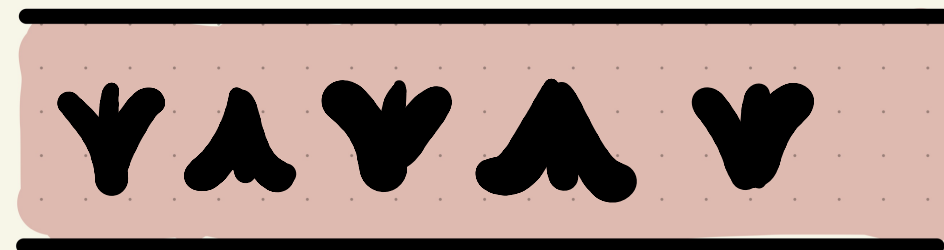
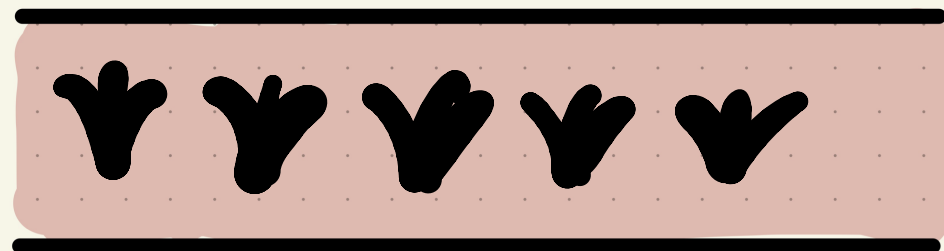
Конвея - Кокстера

Фриз храма Веспасиана
(IV н.э., Рим, Римский форум)

[illegible]

Разминка античная

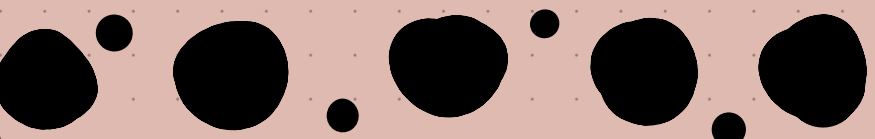
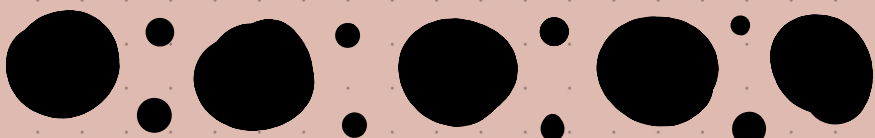
① Соедините орнаменты у которых одинаковы симметрии



Разминка античная

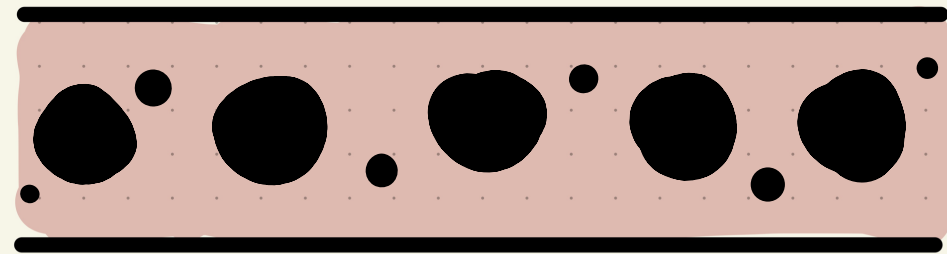
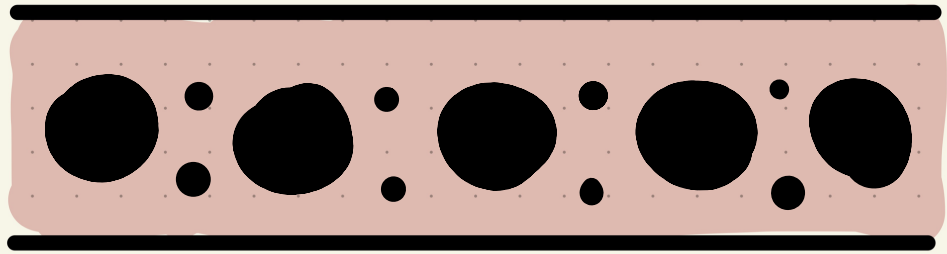
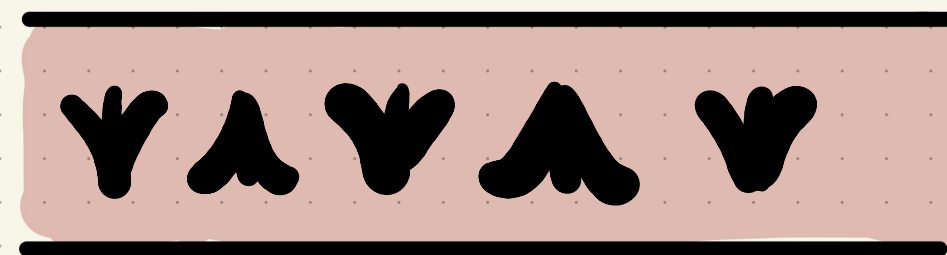
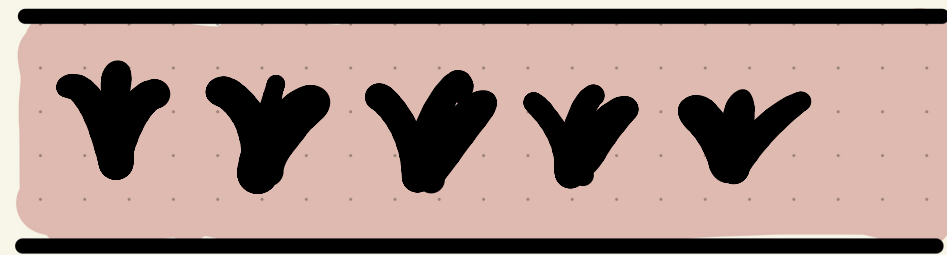
① Соедините фриз у которых одинаковы симметрии

Ответ:



Разминка античная

1. Соедините орнаменты у которых одинаковы симметрии



... b b b b b ...

... b p b p b ...

... b d b d b ...

... b q b q b ...

... b d p q b ...

... c c c c c ...

... o o o o o ...

... v v v v v ... 1

... D D D D D ... 2

... L L L L L ... 3

... H H H H H ... 4

... L L L L L ... 5

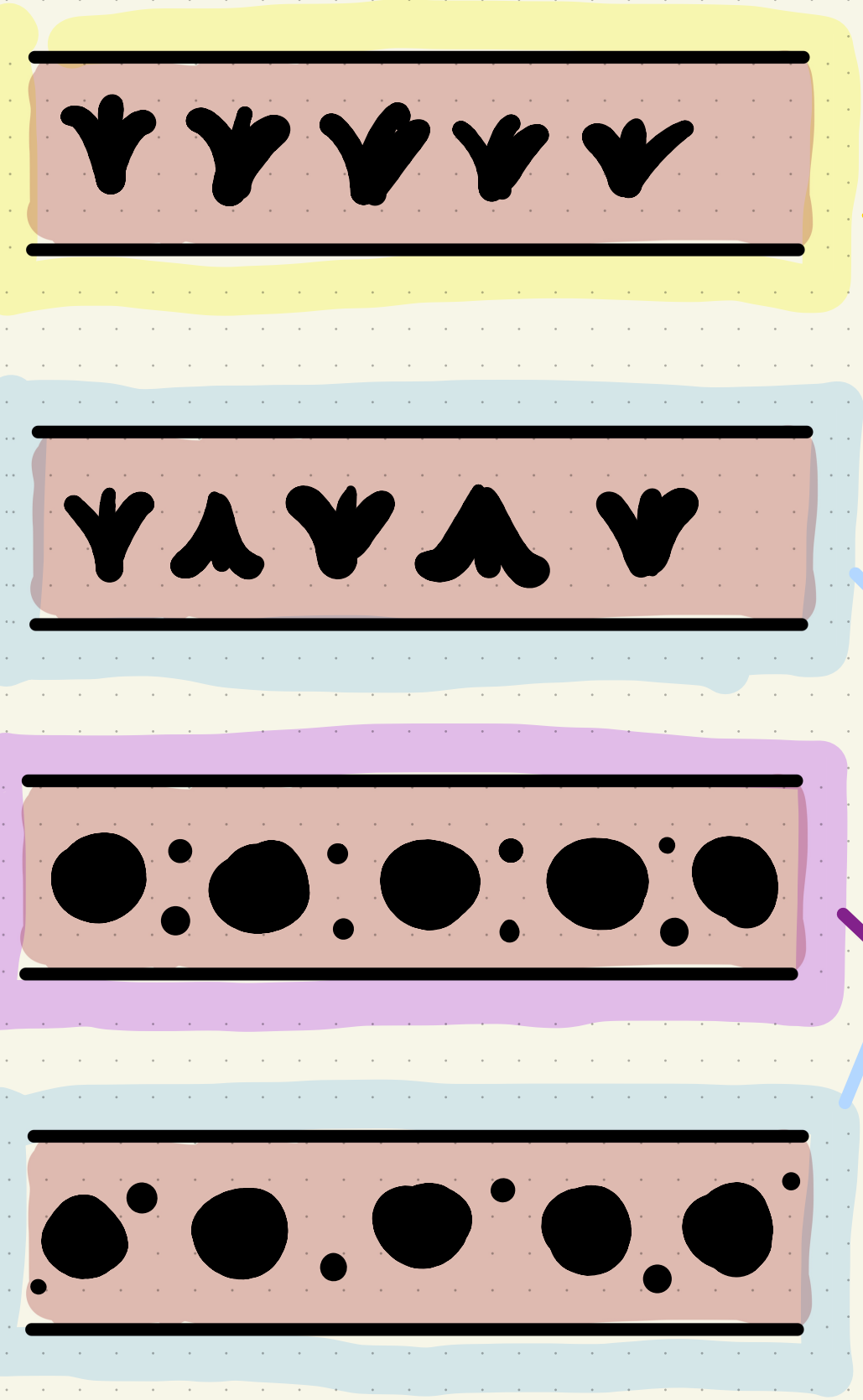
... N N N N N ... 6

... V A V A V ... 7

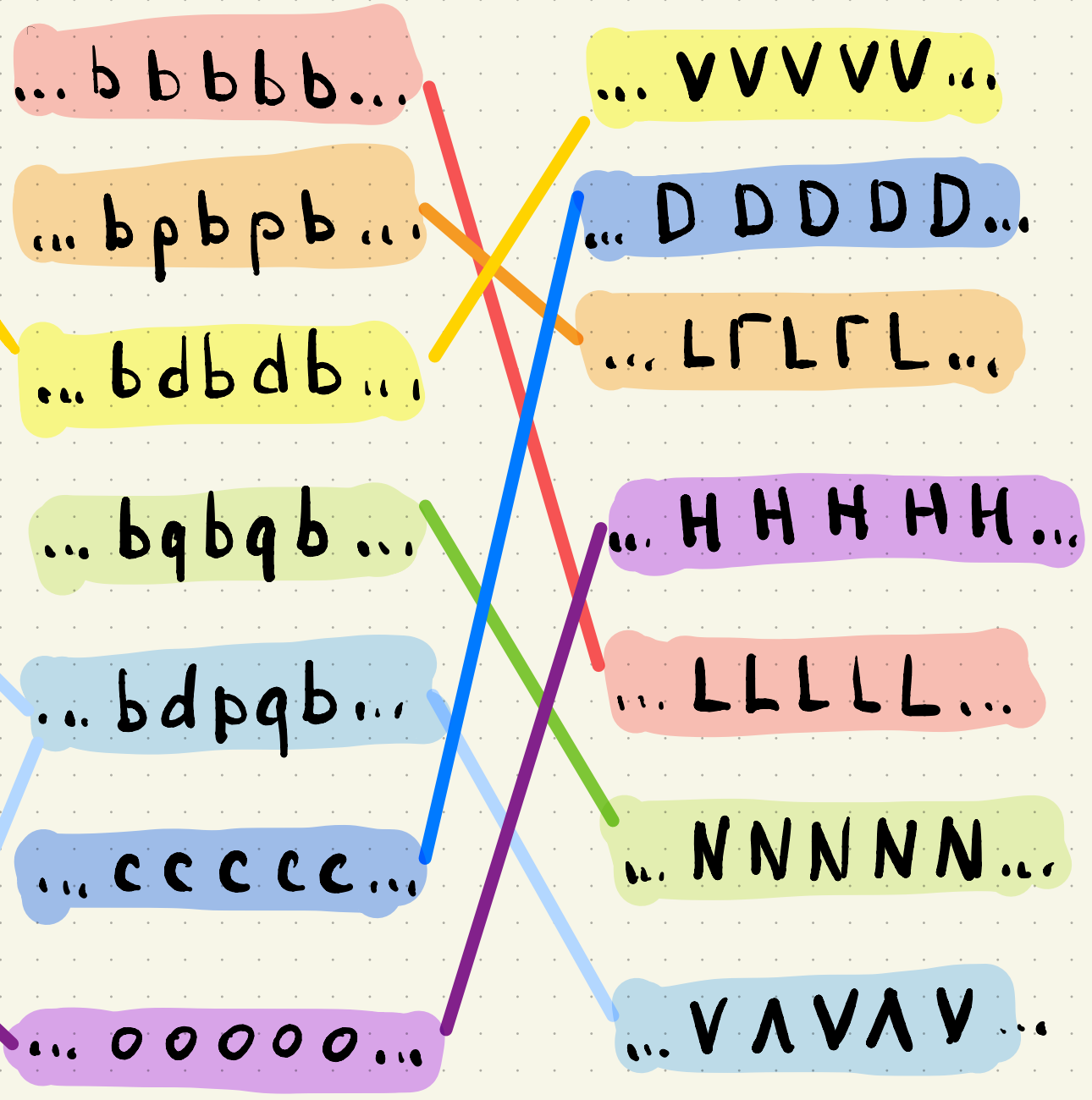
b
p
d
q
c
o

Разминка алфавитная

Ответ:



1. Соедините фриз у которых одинаковы симметрии



Можно показать, что это все возможные типы симметрич фриза

бесконечность полоски

...	b	b	b	b	b	...	or	...	L	L	L	L	L	...
...	b	p	b	p	b	...	or	...	L	Г	L	Г	L	...
...	b	d	b	d	b	...	or	...	V	V	V	V	V	...
...	b	q	b	q	b	...	or	...	N	N	N	N	N	...
...	b	d	p	q	b	...	or	...	V	^	V	^	V	...
...	c	c	c	c	c	...	or	...	D	D	D	D	D	...
...	o	o	o	o	o	...	or	...	H	H	H	H	H	...

← Из статьи Конвея - Кокстера

Разминка римская

2. Соедините орризы у которых одинаковы симметрии

... b b b b b ...

... b p b p b ...

... b d b d b ...

... b q b q b ...

... b d p q b ...

... c c c c c ...

... o o o o o ...

(a) ... I I I I ...

(b) ... I I I I ...
... I I I I

(c) ... I I I I ...
... I I II I I II
I I I I ...

(d) ... I I I I I I ...
... III I II II I III
II II I III I II ...
... I I I I I I

...	b	b	b	b	b	...	or	...	L	L	L	L	L	...
...	b	p	b	p	b	...	or	...	L	Г	L	Г	L	...
...	b	d	b	d	b	...	or	...	V	V	V	V	V	...
...	b	q	b	q	b	...	or	...	N	N	N	N	N	...
...	b	d	p	q	b	...	or	...	V	Λ	V	Λ	V	...
...	c	c	c	c	c	...	or	...	D	D	D	D	D	...
...	o	o	o	o	o	...	or	...	H	H	H	H	H	...

Разминка римская

2. Соедините орризы у которых одинаковы симметрии

... b b b b b ...

... b p b p b ...

... b d b d b ...

... b q b q b ...

... b d p q b ...

... c c c c c ...

... o o o o o ...

(a) ... I I I I ...

(b) ... I I I I ...
... I I I I ...

(c) ... I I I I ...
... I I II I I II ...
... I I I I ...

(d) ... I I I I I I ...
... III I II II I III ...
... II II I III I II ...
... I I I I I I ...



	1		1		1		1		1	...
...	3		1		2		2		1	3
2		2		1		3		1		2
...	1		1		1		1		1	1

[Будем думать о значении чисел а не о симметрии самой записи]

...	b	b	b	b	b	...	or	...	L	L	L	L	L	...
...	b	p	b	p	b	...	or	...	L	Г	L	Г	L	...
...	b	d	b	d	b	...	or	...	V	V	V	V	V	...
...	b	q	b	q	b	...	or	...	N	N	N	N	N	...
...	b	d	p	q	b	...	or	...	V	Λ	V	Λ	V	...
...	c	c	c	c	c	...	or	...	D	D	D	D	D	...
...	o	o	o	o	o	...	or	...	H	H	H	H	H	...

Разминка римская

3-5 Соедините орризы у которых одинаковы симметрии

- ... b b b b b ...
- ... b p b p b ...
- ... b d b d b ...
- ... b q b q b ...
- ... b d p q b ...
- ... c c c c c ...
- ... o o o o o ...

(3)

1

1

1

1

1

1

1

1

...

1

3

1

3

1

...

2

2

2

2

2

2

2

...

3

1

3

1

3

...

1

1

1

1

1

1

1

(4)

1

1

1

1

1

1

1

...

1

2

3

1

2

...

2

1

5

2

1

5

...

1

2

3

1

2

...

1

1

1

1

1

1

1

(5)

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

...

1

3

2

2

1

4

2

...

1

2

5

3

1

3

7

1

...

1

3

7

1

2

5

3

...

2

1

4

2

1

3

2

2

...

1

1

1

1

1

1

1

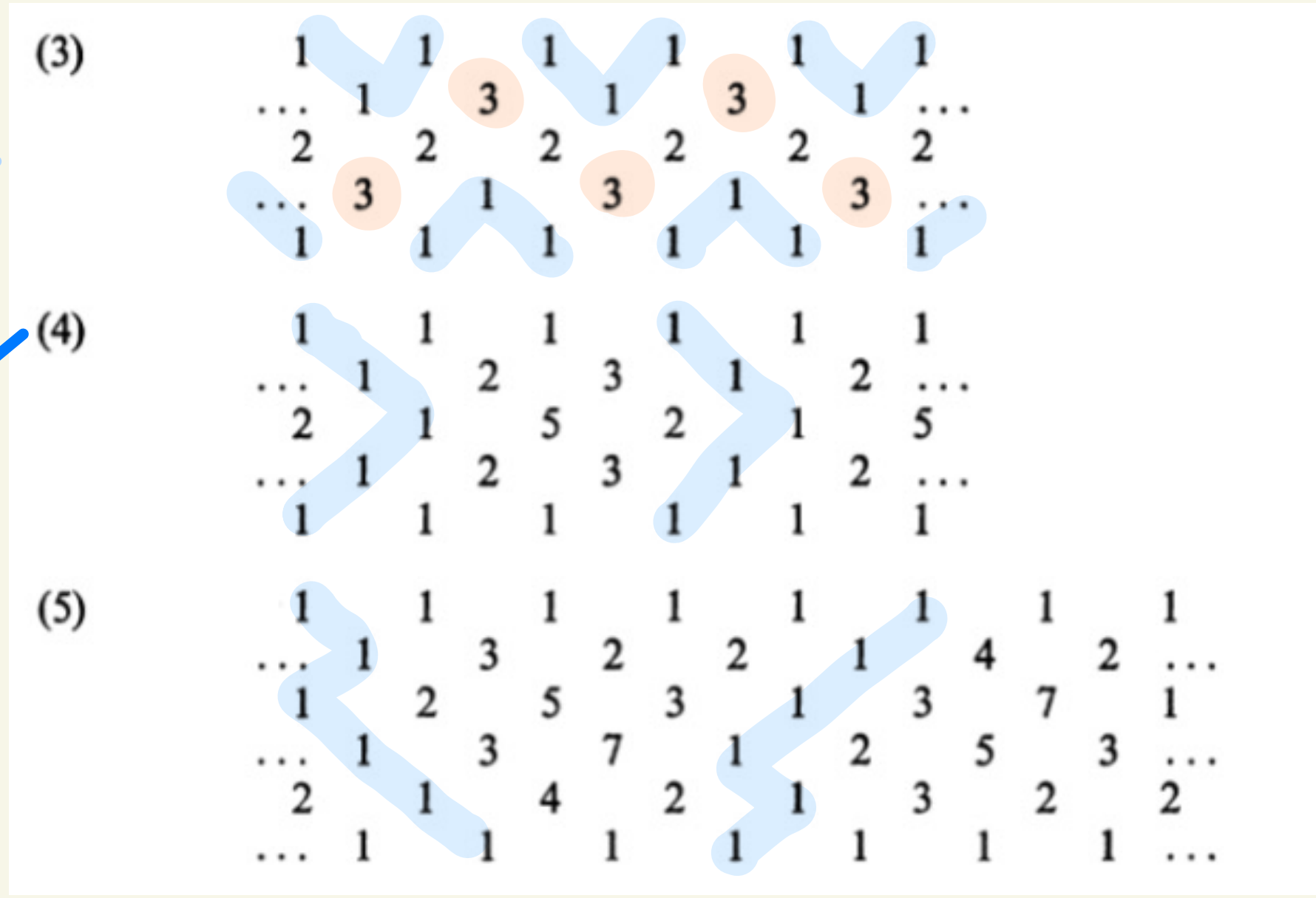
...

...	b	b	b	b	b	...	or	...	L	L	L	L	L	...
...	b	p	b	p	b	...	or	...	L	Г	L	Г	L	...
...	b	d	b	d	b	...	or	...	V	V	V	V	V	...
...	b	q	b	q	b	...	or	...	N	N	N	N	N	...
...	b	d	p	q	b	...	or	...	V	Λ	V	Λ	V	...
...	c	c	c	c	c	...	or	...	D	D	D	D	D	...
...	o	o	o	o	o	...	or	...	H	H	H	H	H	...

Разминка римская

3-5 Соедините орризы у которых одинаковы симметрии

- ... b b b b b ...
- ... b p b p b ...
- ... b d b d b ...
- ... b q b q b ...
- ... b d p q b ...
- ... c c c c c ...
- ... o o o o o ...



...	b	b	b	b	b	...	or	...	L	L	L	L	L	...
...	b	p	b	p	b	...	or	...	L	Г	L	Г	L	...
...	b	d	b	d	b	...	or	...	V	V	V	V	V	...
...	b	q	b	q	b	...	or	...	N	N	N	N	N	...
...	b	d	p	q	b	...	or	...	V	Λ	V	Λ	V	...
...	c	c	c	c	c	...	or	...	D	D	D	D	D	...
...	o	o	o	o	o	...	or	...	H	H	H	H	H	...

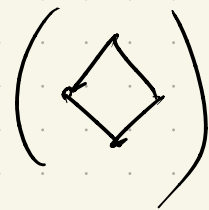
o o o

Призы Конвея - Кокстера:

- Таблицы чисел

- (1) по краям ряды единицы
- (2) еще дальше - ряды нулей
(их часто не пишут)

	1		1		1		1		1		1		1	
...	1		3		1		3		1		3		1	...
2		2		2		2		2		2		2		2
...	3		1		3		1		3		1		3	...
1		1		1		1		1		1		1		1



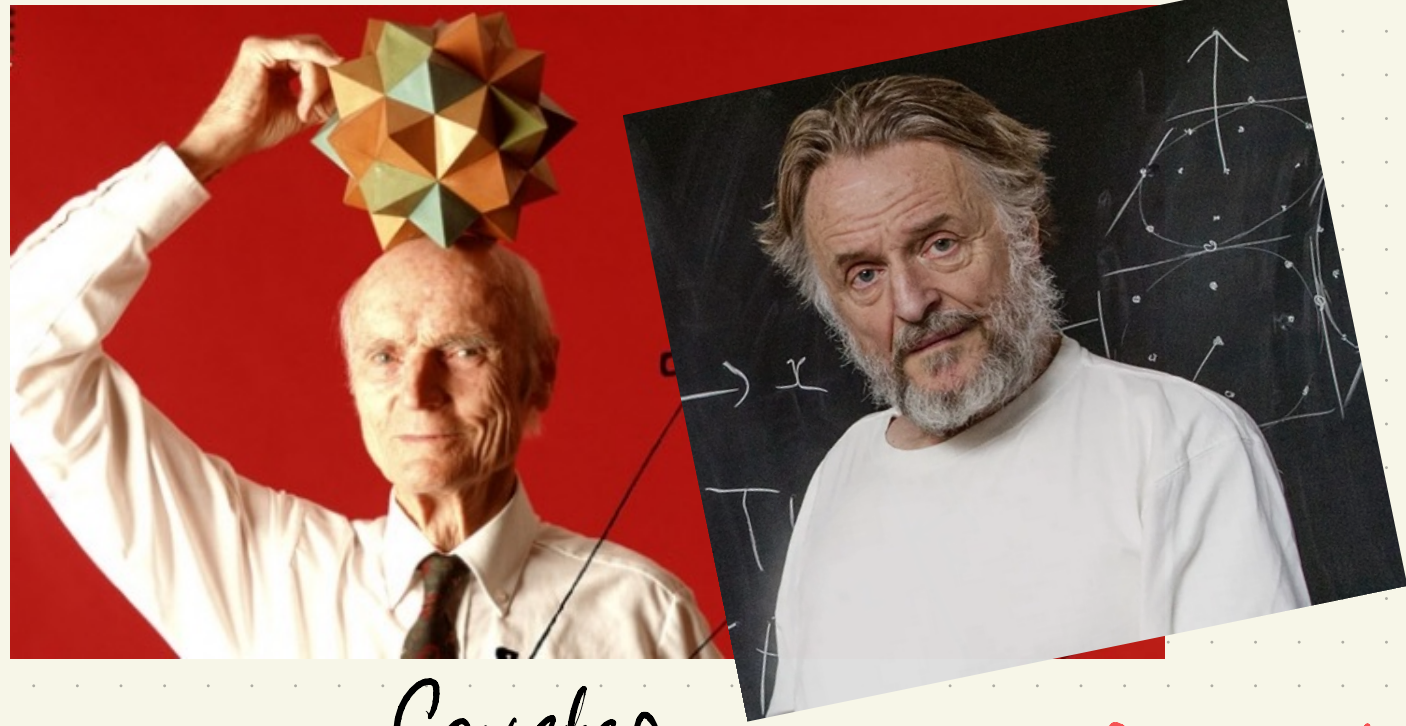
Числа в малых ромбах
удовлетворяют
арифметическому правилу

$a^b c^d$

6. Какую?

	1		1		1		1		1		1		1	
...	1		2		3		1		2		3		1	...
2		1		5		2		1		5		2		5
...	1		2		3		1		2		3		1	...
1		1		1		1		1		1		1		1

	1		1		1		1		1		1		1	
...	1		3		2		2		1		4		2	...
1		2		5		3		1		3		7		1
...	1		3		7		1		2		5		3	...
2		1		4		2		1		3		2		2
...	1		1		1		1		1		1		1	...



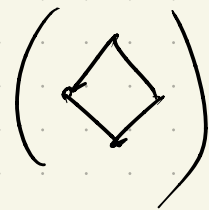
1907-2003 Coxeter 1937-2020 Conway

Призы Конвея - Кокстера:

- Таблицы чисел

- (1) по краям ряды единицы
- (2) еще дальше - ряды нулей
(их часто не пишут)

	1		1		1		1		1		1		1		1		1
...	1		3		1		3		1		3		1		3		1
	2		2		2		2		2		2		2		2		2
...	3		1		3		1		3		1		3		1		3
	1		1		1		1		1		1		1		1		1



Числа в малых ромбах
удовлетворяют
арифметическому правилу

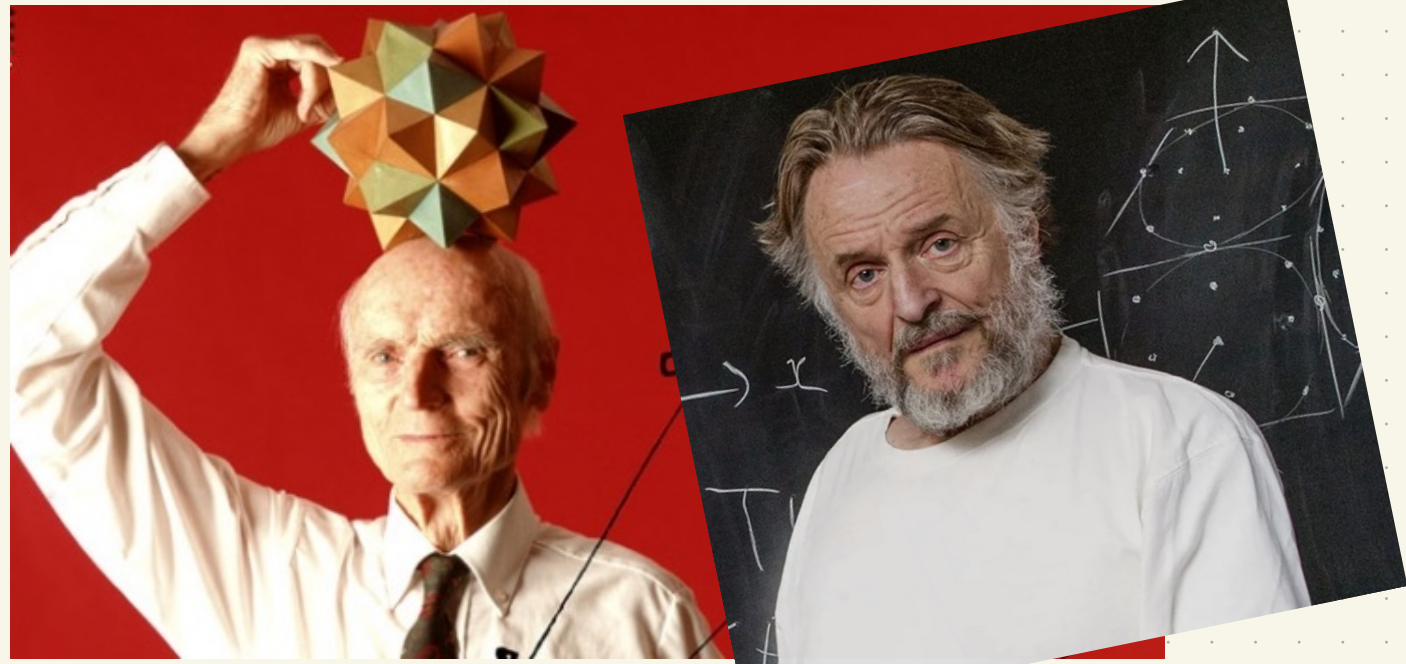
$a \ b \ c \ d$

Какому?

$$ad - bc = 1$$

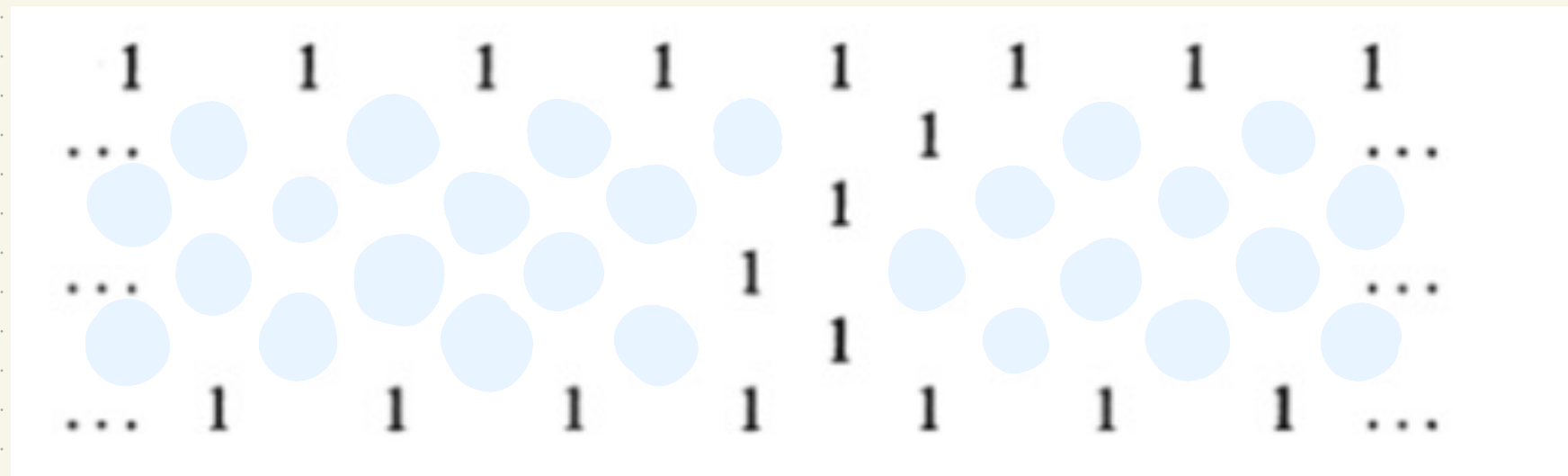
	1		1		1		1		1		1		1		1		1
...	1		2		3		1		2		3		1		2		3
	2		1		5		2		1		5		2		1		5
...	1		2		3		1		2		3		1		2		3
	1		1		1		1		1		1		1		1		1

	1		1		1		1		1		1		1		1		1
...	1		3		2		2		1		4		2		3		1
	1		2		5		3		1		3		7		1		5
...	1		3		7		1		2		5		3		1		3
	2		1		4		2		1		3		2		1		2
...	1		1		1		1		1		1		1		1		1



1907-2003 **Coxeter** 1937-2020 **Conway**

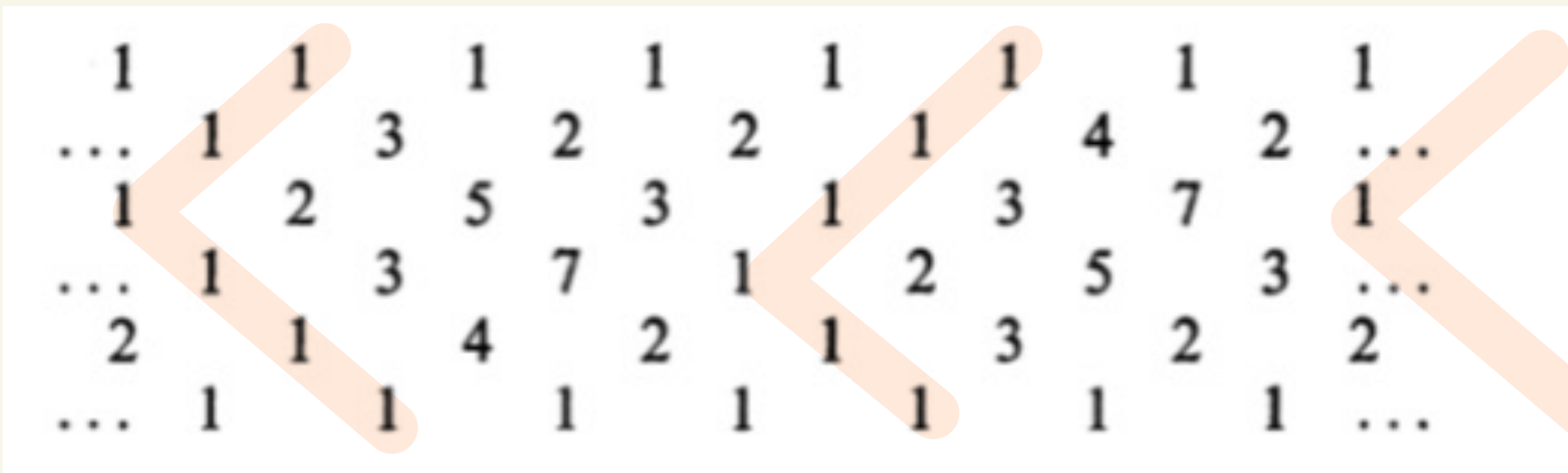
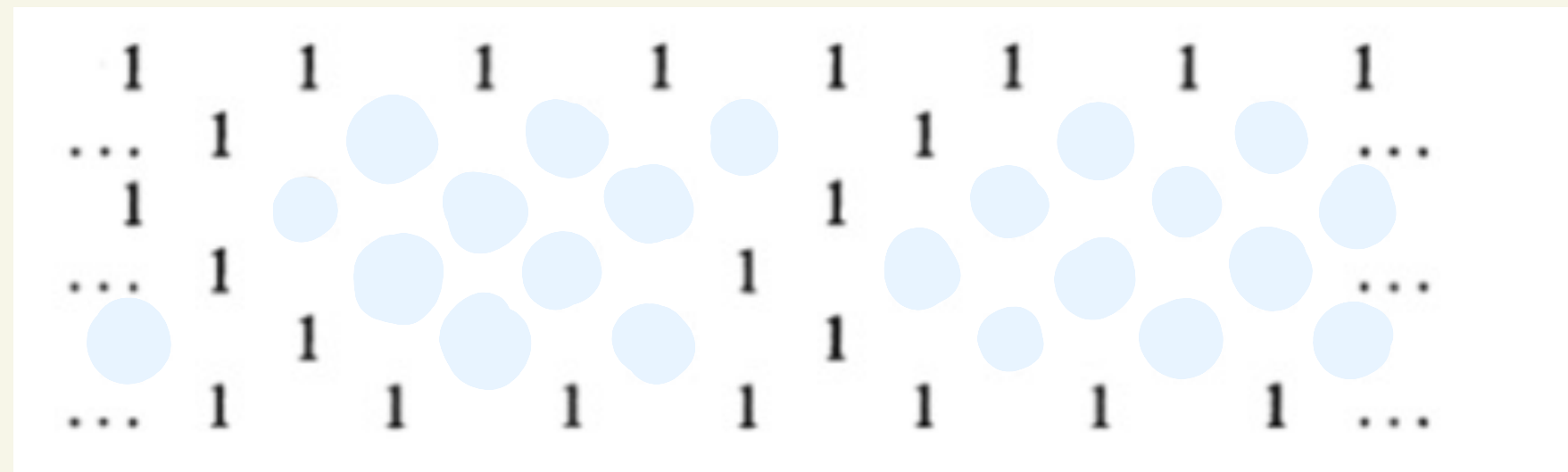
⑦ Восстановите стёртые числа орриза:



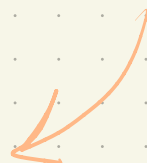
$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$
$$ad - bc = 1$$

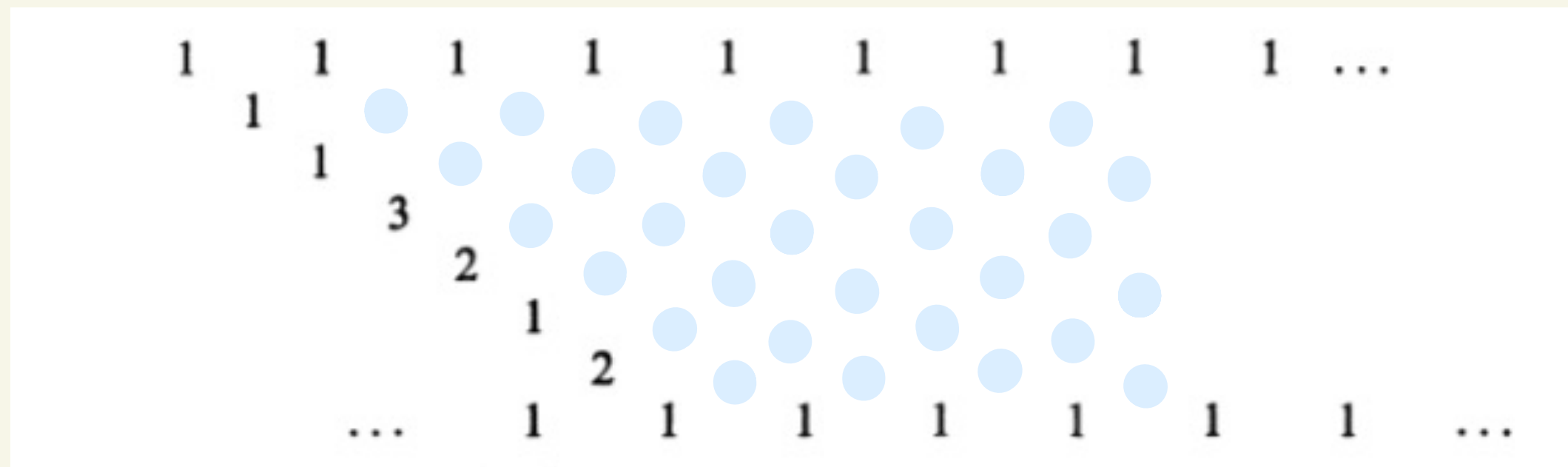
7 Восстановите стёртые числа матрица:

$$\begin{matrix} a & b & d \\ & c & \\ ad - bc & = & 1 \end{matrix}$$



Ответ

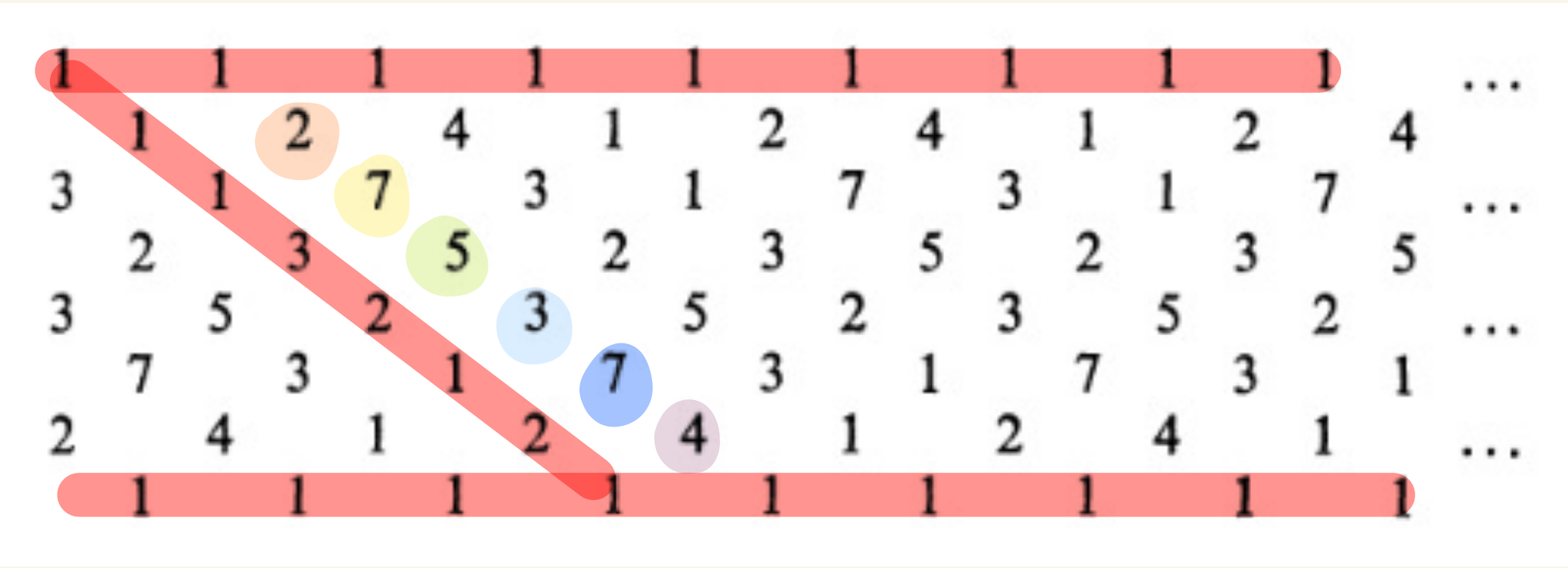
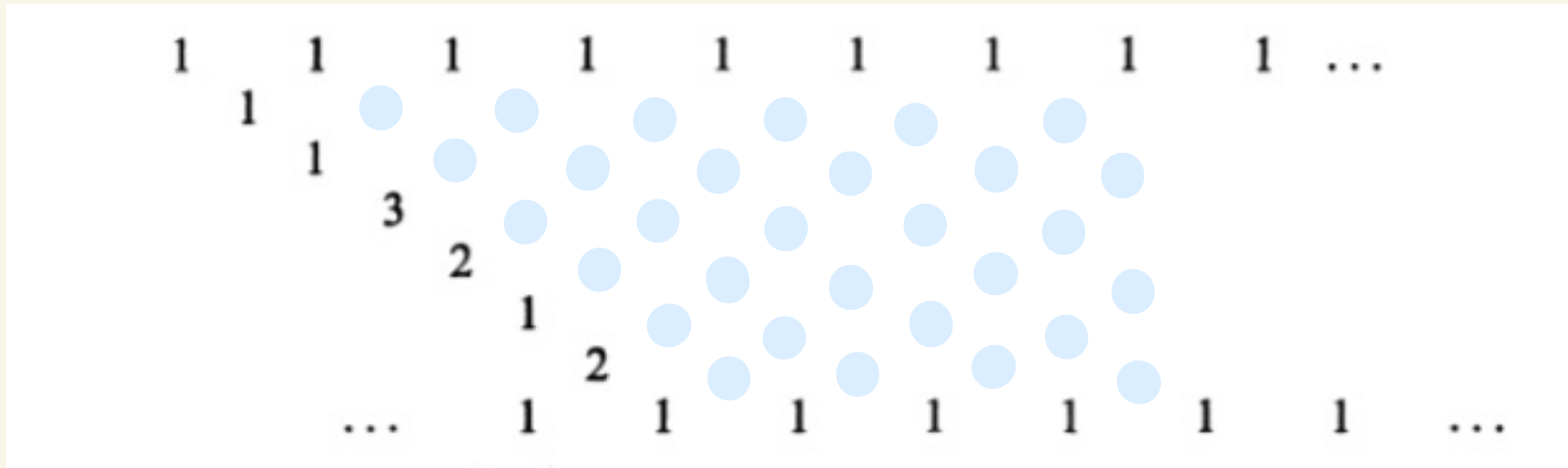


$$\begin{array}{ccc} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{array}$$
$$ad - bc = 1$$


10) Покажите, что для восстановления орриза достаточно знать числа на одной диагонали

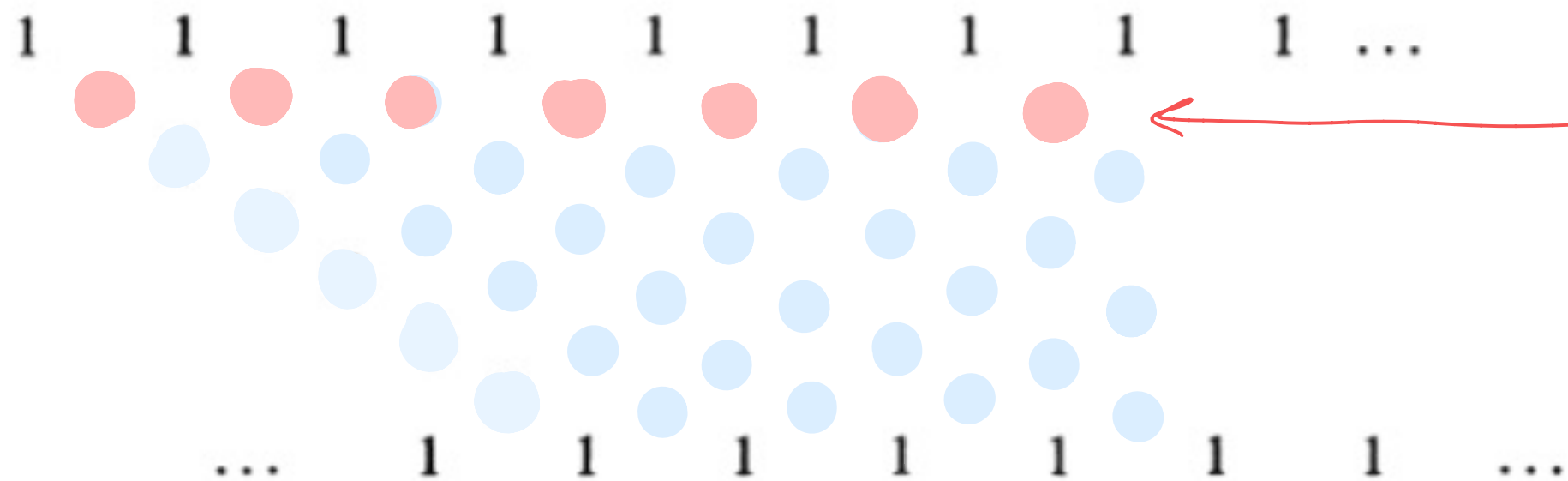
$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

$$ad - bc = 1$$



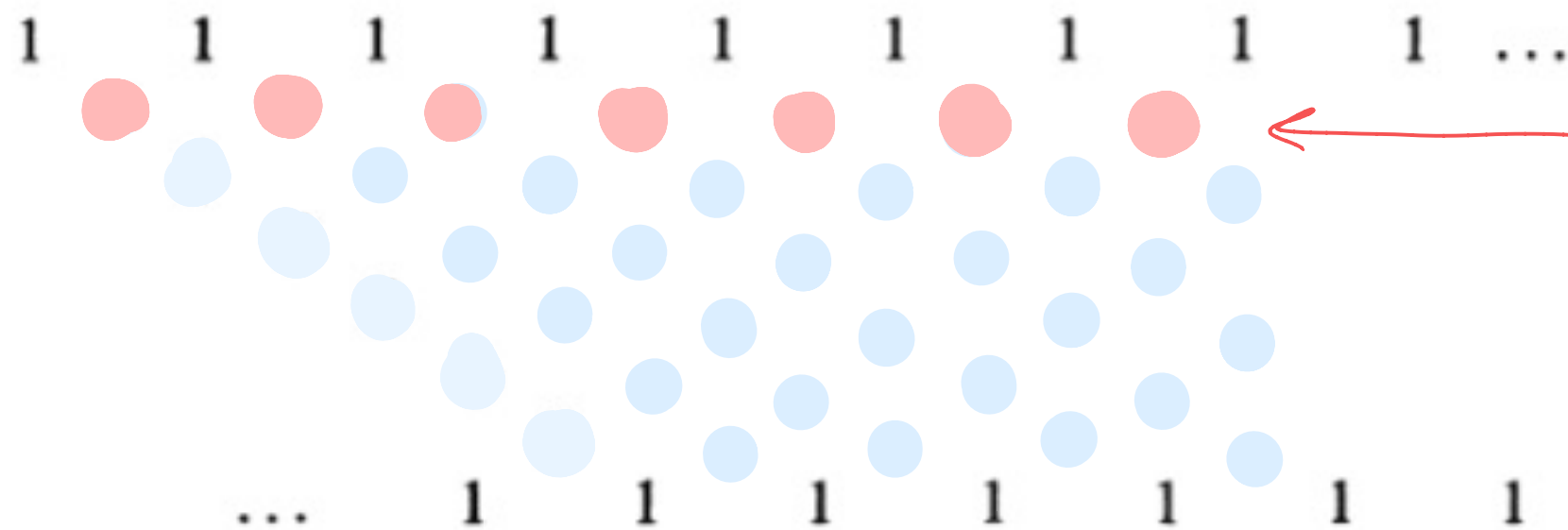
11 Покажите, что для восстановления сриза достаточно знать числа первого ряда

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{array}$$
$$ad - bc = 1$$



11 Покажите, что для восстановления сриза достаточно знать числа первого ряда

$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$
$$ad - bc = 1$$



quiddity row
(сущность)
(суть)

Translations of quiddity

noun

каверза

trick, devilment, quiddity, quillet

суть

essence, nature, substance, point, core, quiddity

тонкість

subtlety, fineness, delicacy, finesse, polish, quiddity

Translations of quiddity

noun

сущность

essence, entity, nature, fact, spirit, quiddity

каламбур

pun, quibble, wordplay, play on words, equivoque, quiddity

игра слов

pun, play on words, quibble, wordplay, quirk, quiddity

увертка

subterfuge, evasion, dodge, quip, quibble, quiddity

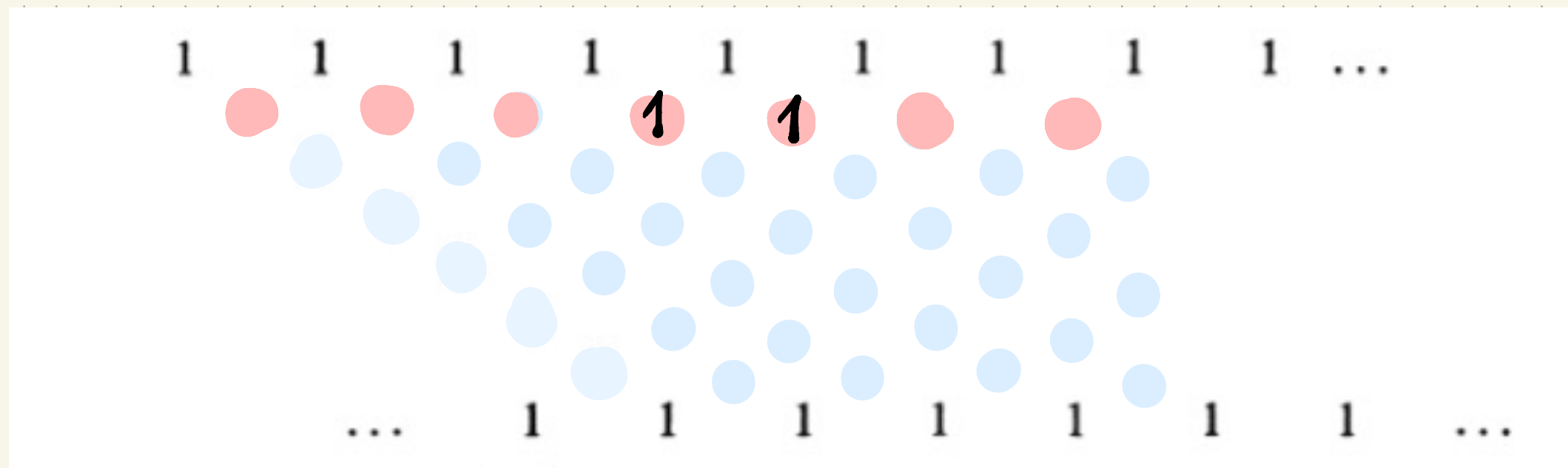
софизм

sophism, fallacy, quibbling, quibble, quip, quiddity

12) Может ли суть положительного фриза
содержать две единицы подряд?

$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

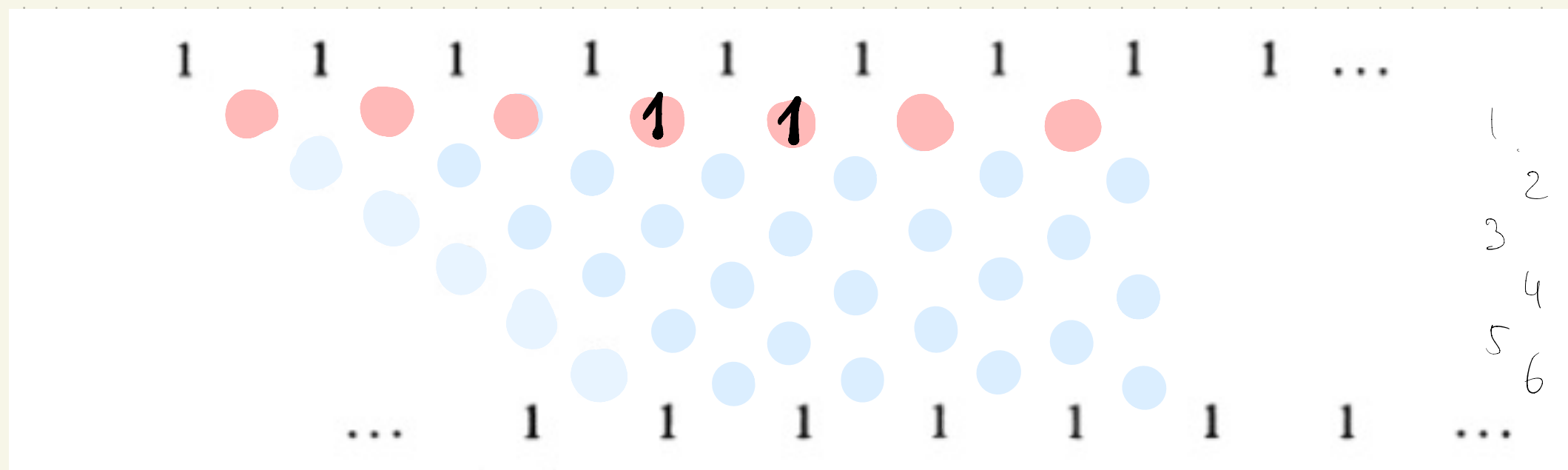
$$ad - bc = 1$$



12) Может ли суть положительного фриза содержать две единицы подряд?

$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

$$ad - bc = 1$$



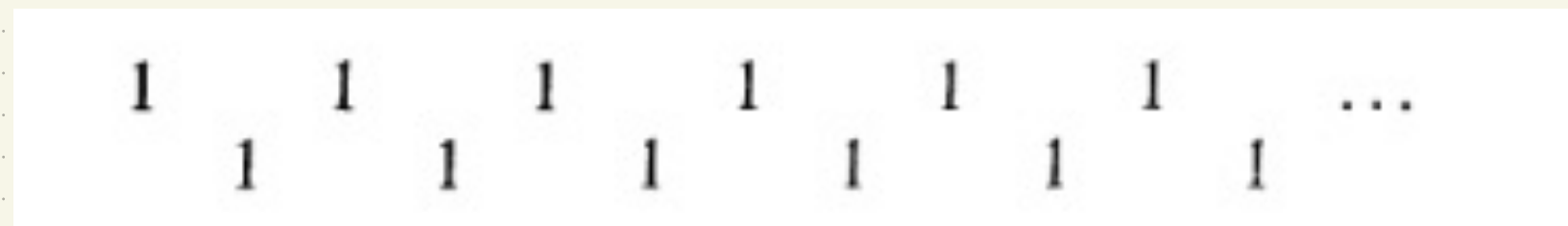
фриз
ширины 6

Решение:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{0 - 1 \cdot ? = 1} \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \end{matrix}$$

? ? ?

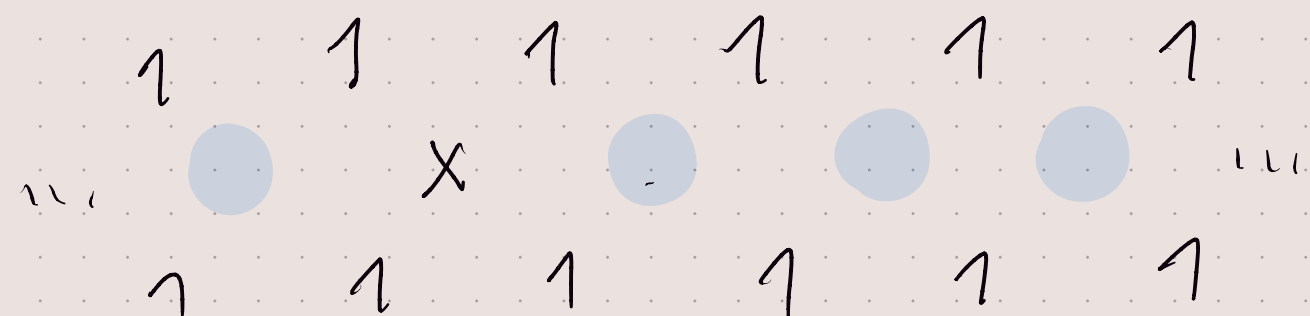
Т.е. ширина = 1,
но такой фриз есть:



Ширина фриза =
число рядов между
единичными рядами

Ответ: да, но только
если это фриз ширины 0.

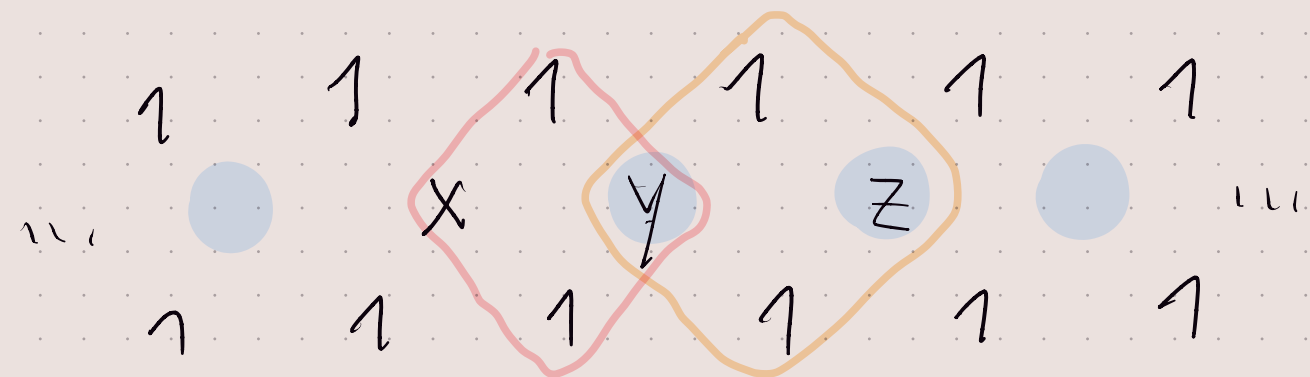
13 Выразите через x элементы фриза:



$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

$$ad - bc = 1$$

13) Выразите через x элементы фриза:



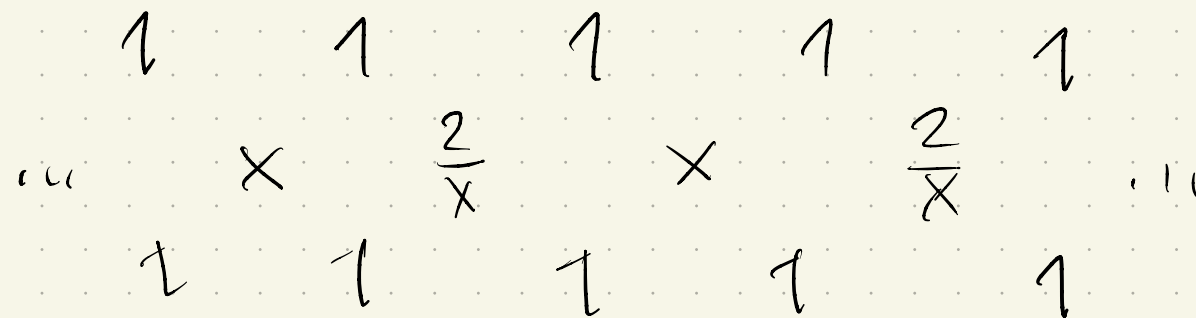
$$\begin{matrix} a & b & d \\ & c & \end{matrix}$$

$$ad - bc = 1$$

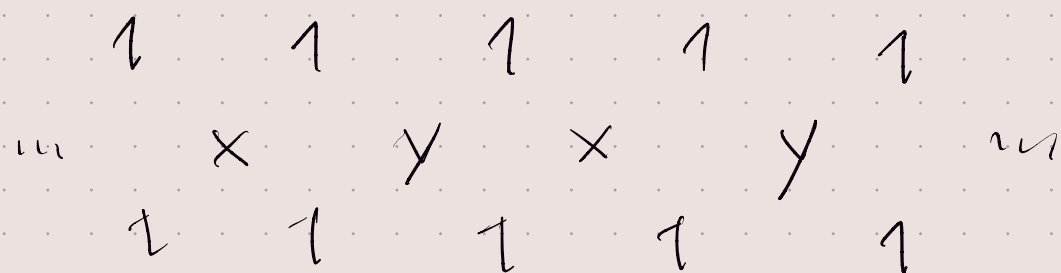
Решение:

$$\begin{aligned} xy - 1 &= 1 \\ y &= \frac{2}{x} \end{aligned}$$

$$z = \frac{2}{y} = \frac{2}{\frac{2}{x}} = x$$

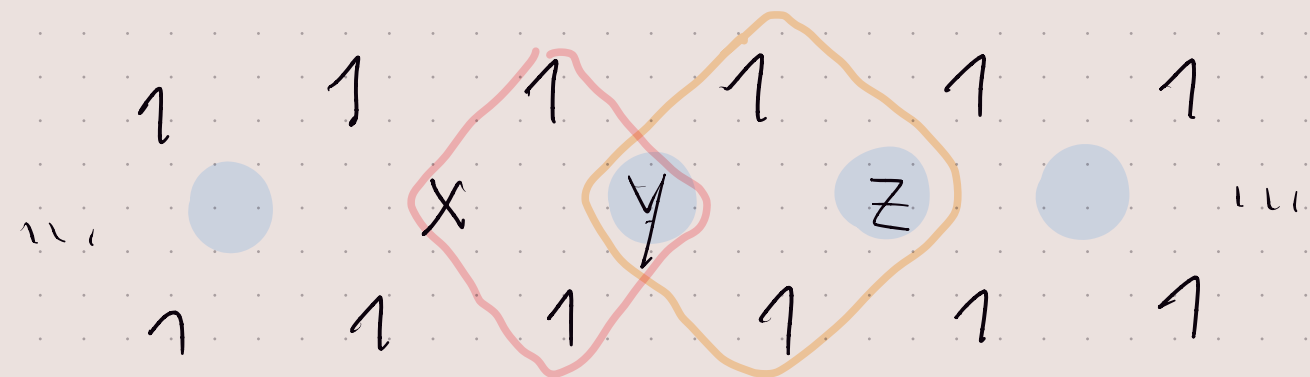


Может ли во фризе



быть $x = y$?

13) Выразите через x элементы фриза:



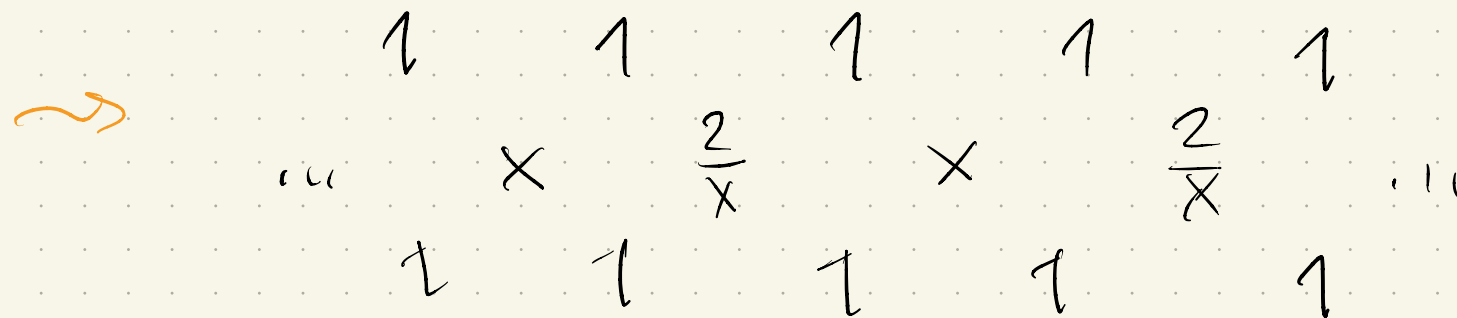
$$\begin{matrix} a & b & d \\ & c & \end{matrix}$$

$$ad - bc = 1$$

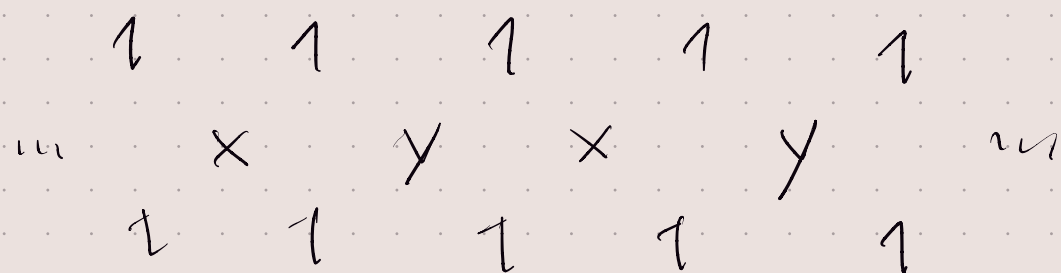
Решение:

$$\begin{aligned} xy - 1 &= 1 \\ y &= \frac{2}{x} \end{aligned}$$

$$z = \frac{2}{y} = \frac{2}{\frac{2}{x}} = x$$



Может ли во фризе



быть $x = y$?

Да, если $xy = 2$,

т.е. $x^2 = 2$,

$$x = y = \sqrt{2}$$

Ответ:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

14

Найдите τ :
(считая, что $\tau > 0$)

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ & \tau & & \tau & & \tau & & \tau & \dots \\ \tau & & \tau & & \tau & & \tau & & \tau \\ & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} a & b & d \\ & c & \\ ad - bc & = & 1 \end{array}$$

14

Найдите τ :
(считая, что $\tau > 0$)

1		1		1		1		1		1		...
	τ		τ		τ		τ		τ		τ	...
τ		τ		τ		τ		τ		τ		τ
	1		1		1		1		1		1	...

$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

$$ad - bc = 1$$

Решение :

$$\tau^2 - \tau = 1$$

$$\tau^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \tau + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\left(\tau - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

$$\tau - \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\tau = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

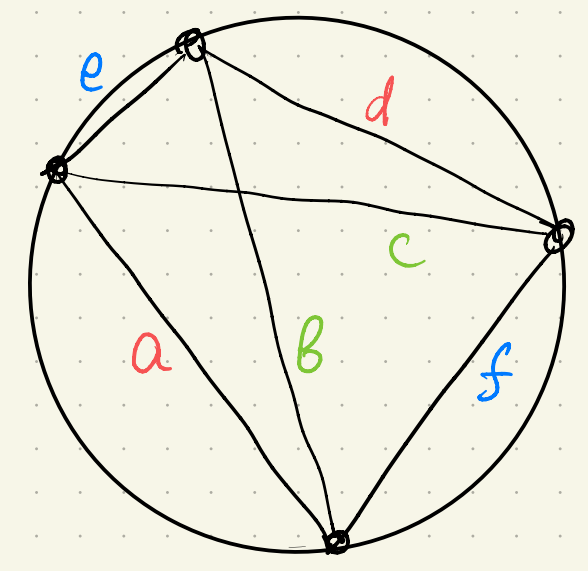
14 Найдите τ :
(считая, что $\tau > 0$)

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ & \tau & & \tau & & \tau & & \tau & \dots \\ \tau & & \tau & & \tau & & \tau & & \tau \\ & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots \end{array}$$

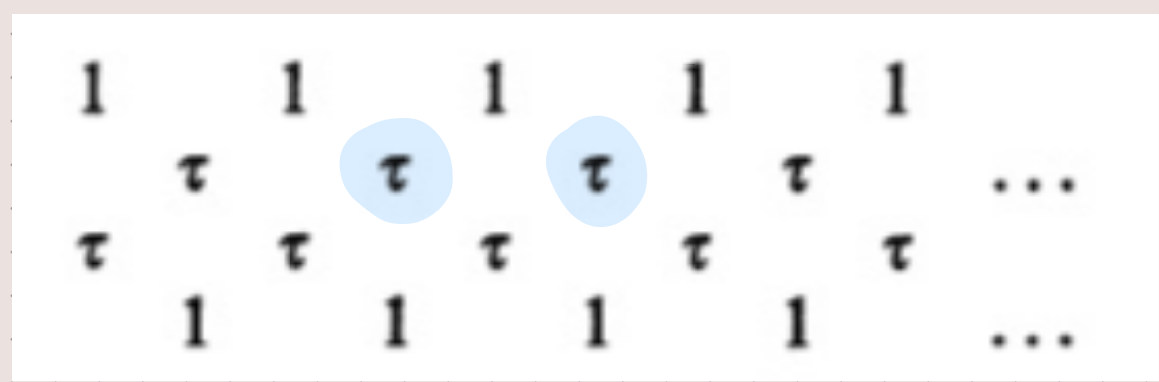
$$\begin{array}{c} a \quad b \quad d \\ \quad c \quad \\ ad - bc = 1 \end{array}$$

Решение: $\tau^2 - \tau = 1 \Rightarrow \tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, золотое сечение

15 Вспомните теорему Птолемея:



14 Найдите τ :
(считая, что $\tau > 0$)

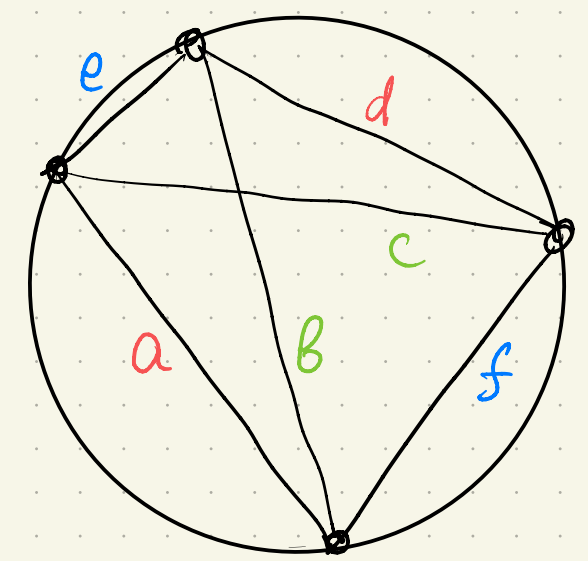


$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

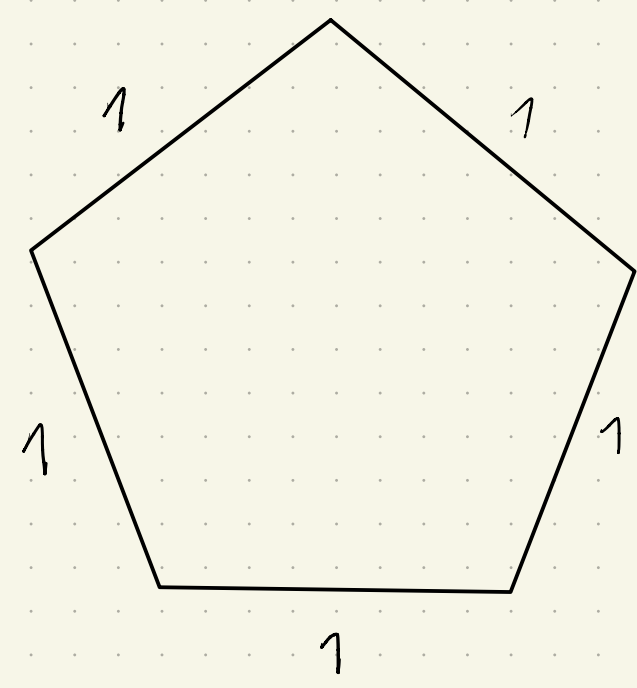
$$ad - bc = 1$$

Решение: $\tau^2 - \tau = 1 \Rightarrow \tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, золотое сечение

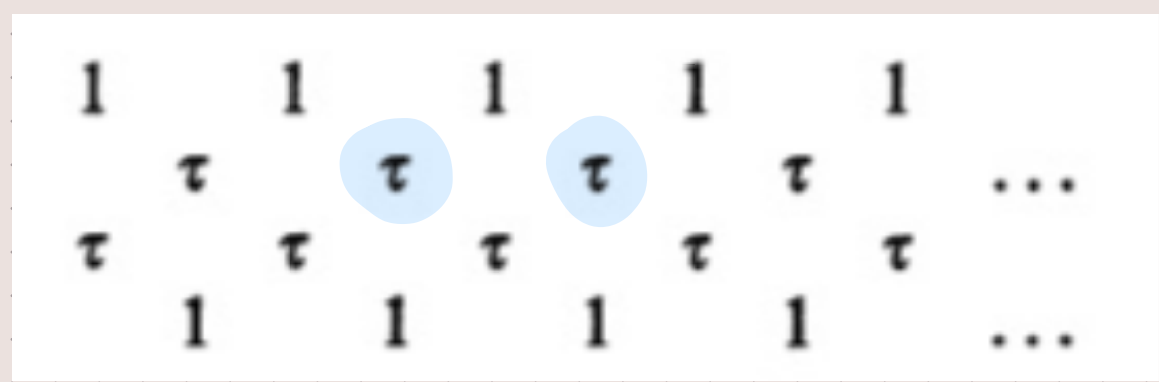
15 Вспомните теорему Птолемея:
что она говорит о диагонали
правильного пятиугольника со сторонами 1?



$bc = ad + ef$



14 Найдите τ :
(считая, что $\tau > 0$)

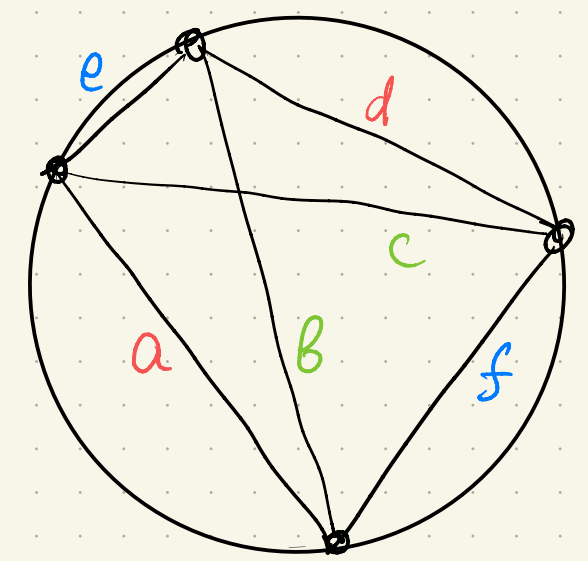


$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

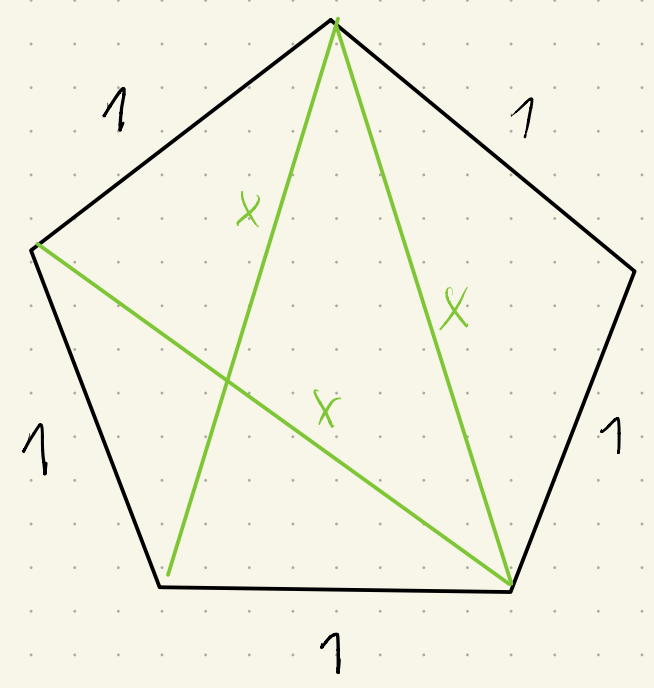
$$ad - bc = 1$$

Решение: $\tau^2 - \tau = 1 \Rightarrow \tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, золотое сечение

15 Вспомните теорему Птолемея:
что она говорит о диагонали
правильного пятиугольника со сторонами 1?



$$bc = ad + ef$$

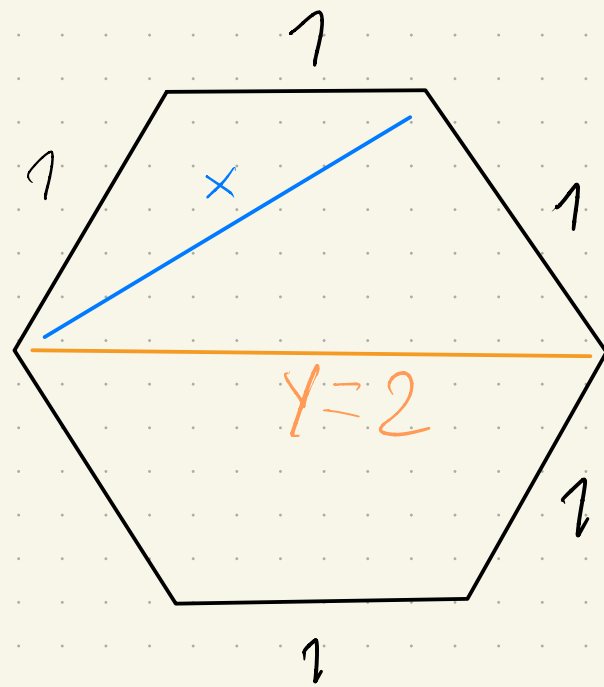


Решение: $x^2 = x \cdot 1 + 1 \cdot 1$
 $x^2 - x = 1$
 $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ — золотое сечение

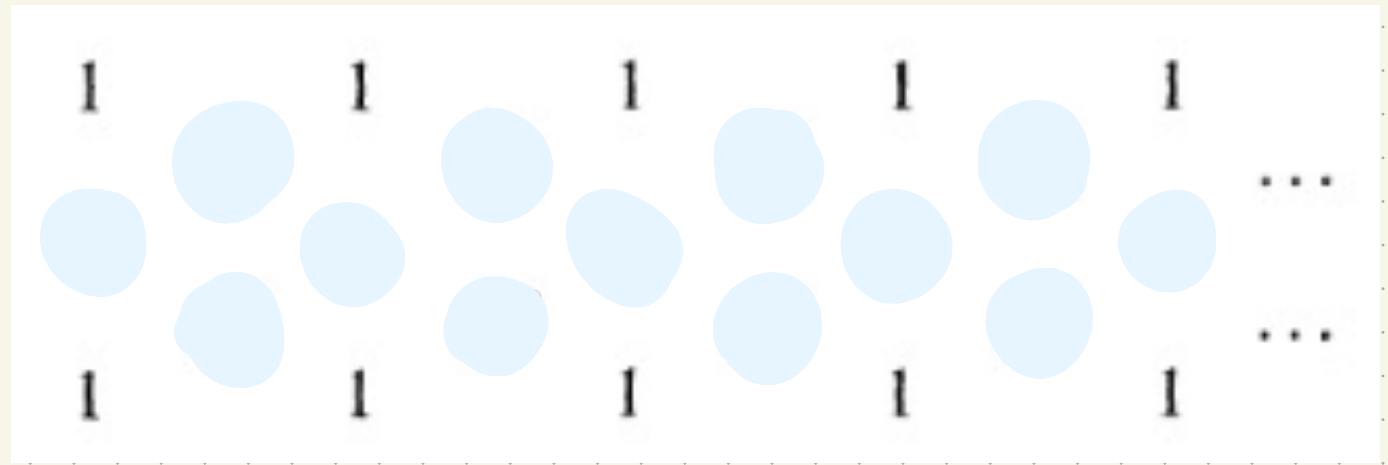
16 Найдите длины диагоналей
 правильного шестиугольника со стороной 1.
 и составьте с их помощью
 фриз ширины 3.

$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

$$ad - bc = 1$$



$x = ?$
 $y = ?$

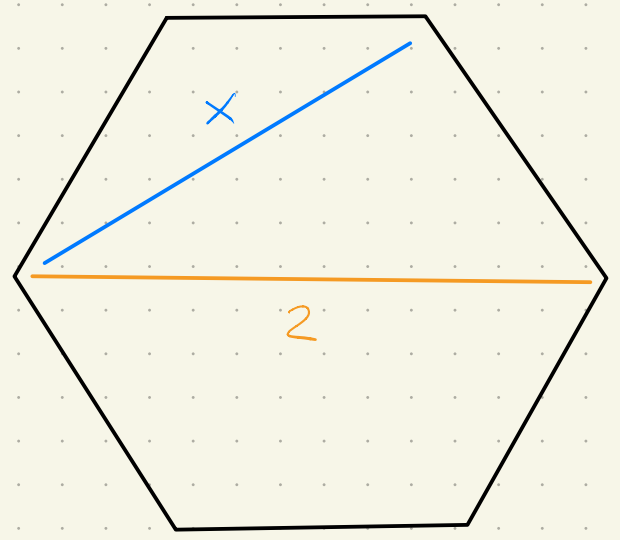


16) Найдите длины диагоналей правильного шестиугольника со стороной 1 и составьте с их помощью фриз ширины 3.

$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

$$ad - bc = 1$$

Решение:



$$x^2 = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1$$

$$x^2 = 3$$

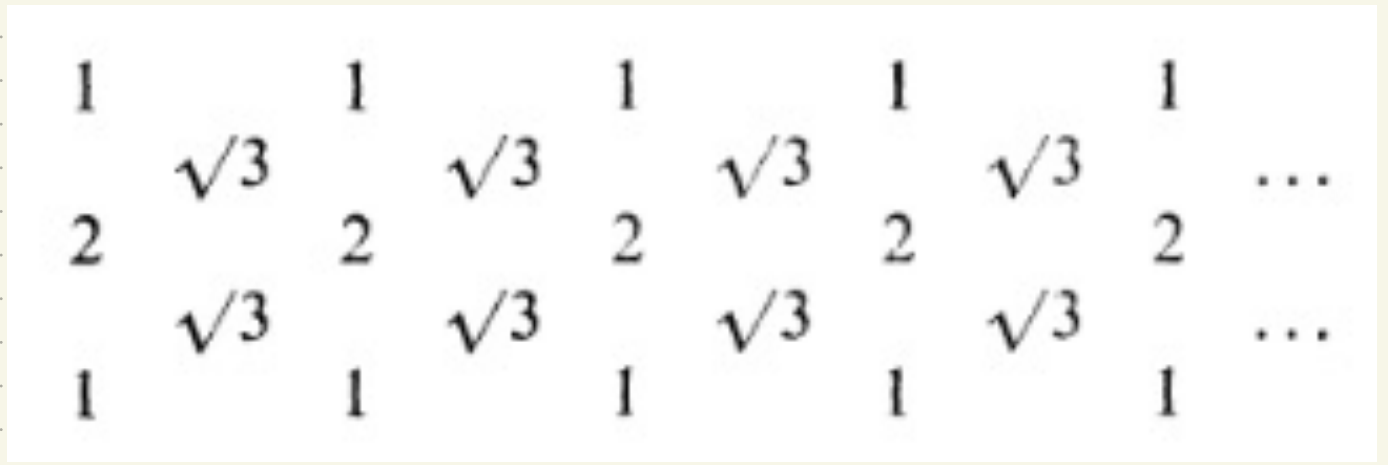
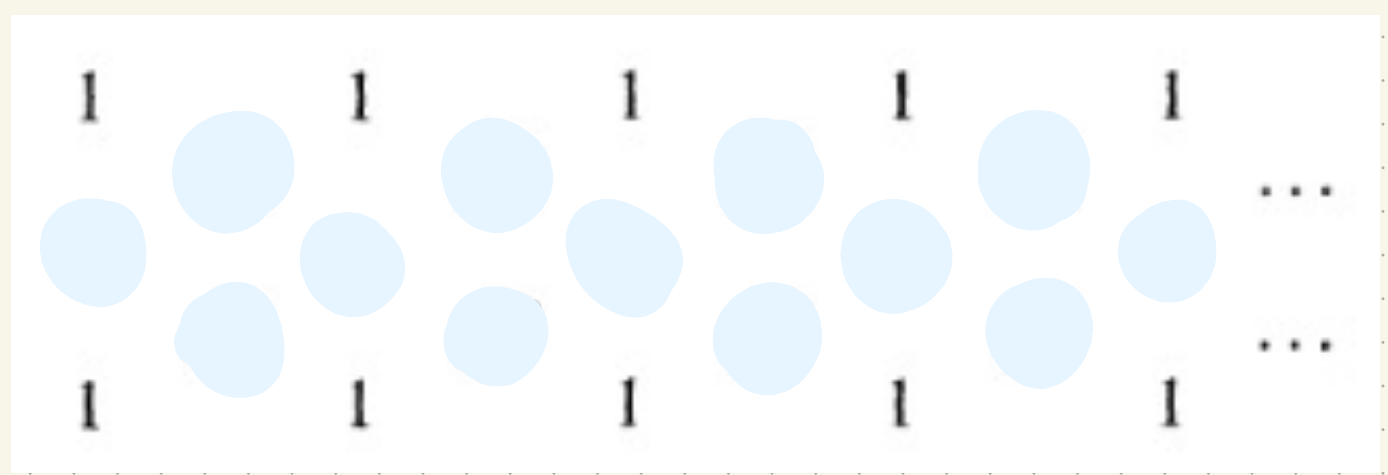
$$x = \sqrt{3}$$

Т.е., $a, c, d \in \{2, \sqrt{3}\}$

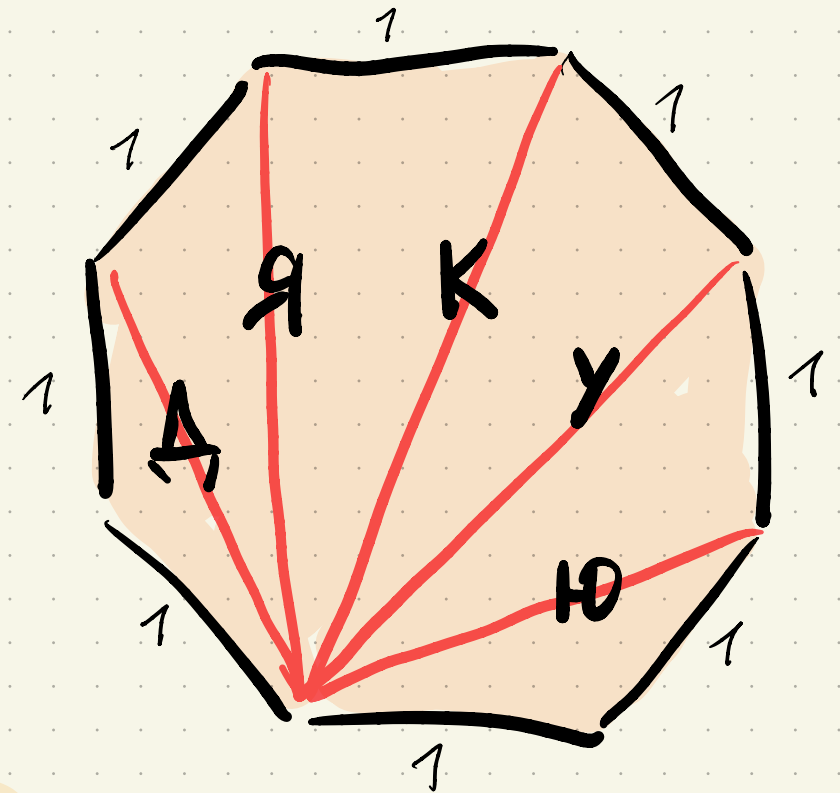
$$ad - bc = 1$$

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - 2 = 1$$

$$\begin{matrix} & 1 & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$



Найдите значения букв
и заполните фриз:



(или просто
заполните фриз
буквами!)

1	1	1	1	1	1	1	1
*	*	Д	*	*	*	*	*
*	*	Я	*	*	*	*	*
*	*	*	К	*	*	*	*
*	*	*	У	*	*	*	*
*	*	*	*	Ю	*	*	*
1	1	1	1	1	1	1	1