

# Осуществляем план с прошлого раза



Планы не простят обман,  
Если им не дать осуществиться -  
Могут эти планы разойтись.  
Так что завтра куколкою станет гусеница, -  
Если не нарушить план.

В. Высоцкий

Гусеница курит кальян  
Иллюстрация Дж. Темпела, 1871



# Осуществляем план с прошлого раза



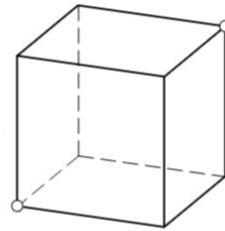
Планы не простят обман,  
Если им не дать осуществиться -  
Могут эти планы разойтись.  
Так что завтра куколкой станет гусеница, -  
Если не нарушить план.

В. Высоцкий

Гусеница курит кальям  
Иллюстрация Дж. Теммела, 1865

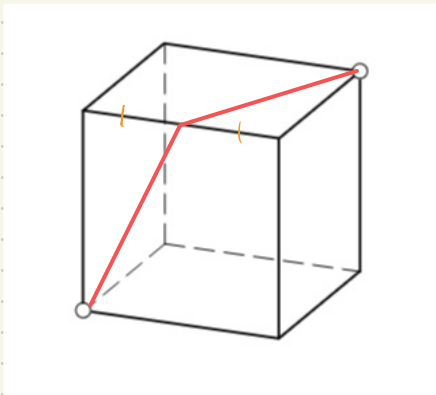


19. Гусеница хочет проползти из одного угла кубической комнаты (на полу слева) в противоположный (на потолке справа). Найти кратчайший путь такого путешествия по стенам комнаты.



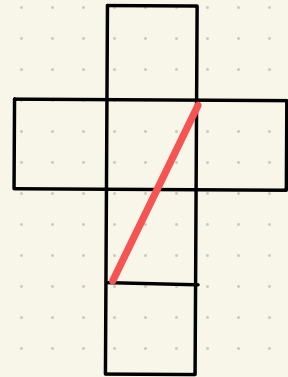
Решение:

надо ползти через середину стороны!



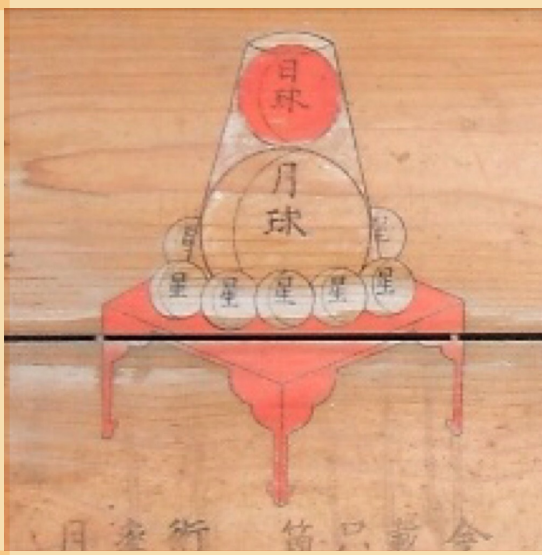
Доказательство:

Посмотрим на развертке:



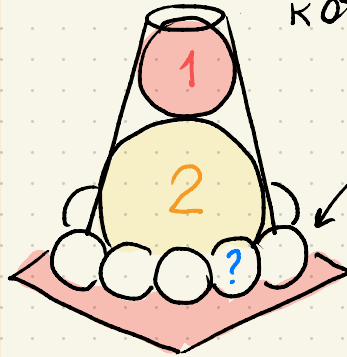
Вопрос:

сколько таких кратчайших путей найдется на кубе?



Конус касается шаров  
радиуса 1 и 2  
которые касаются друг друга.

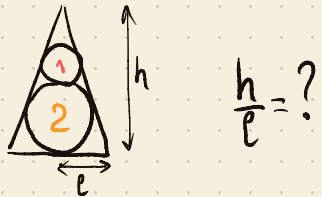
В чём задача?



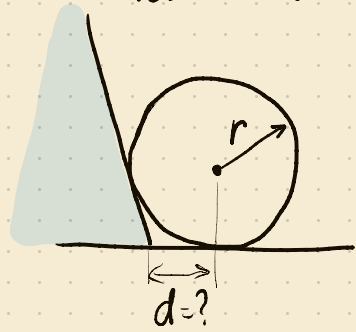
$N$  одинаковых  
касающихся шаров  
касаются конуса и плоскости  
Найти их радиусе  $r=?$

План решения:

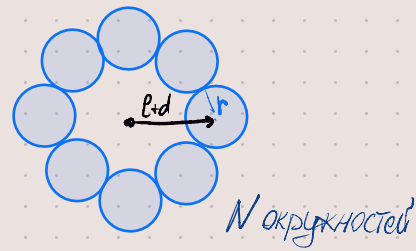
① Найти угол конуса,  
зная  $R_1=1$ ,  $R_2=2$



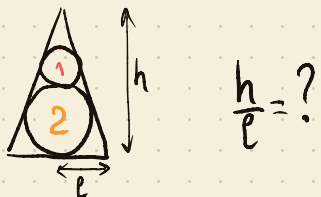
② Для такого конуса,  
найти  $d$



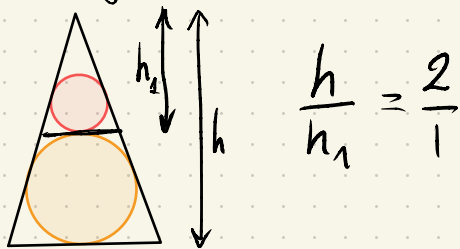
③ В плоскости  
через центры  
маленьких шаров



1. Найти угол конуса, зная  $R_1=1$ ,  $R_2=2$



1. Найдем  $h$ :

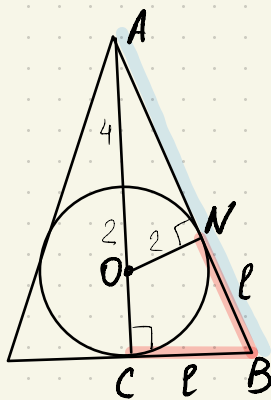


$$h_1 = h - 4 \quad h_1$$

$$h = 8$$

Решение:

2. Найдем  $l$



$$AN = \sqrt{6^2 - 2^2} = 2\sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AO}{AN} = \frac{6}{4\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

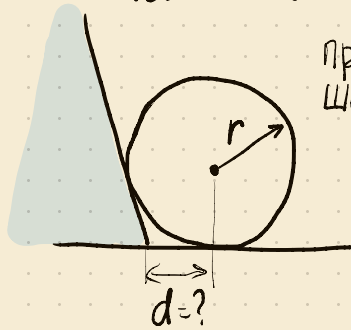
$$AB = AC \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4} = 8 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4} = 6\sqrt{2}$$

$$l = AB - AN = 6\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

3.

$$\frac{h}{l} = \frac{8}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

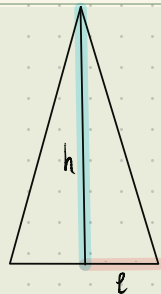
2. Для такого конуса, найти  $d$



при касании шара радиуса  $r$

Решение:

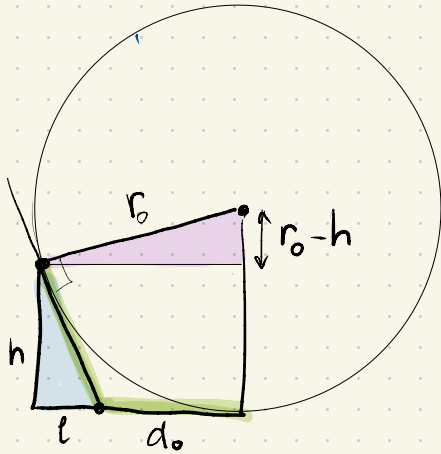
Сначала найдем  $d_0$  для окружности радиуса  $r_0$ , касающейся конуса в вершине, потом воспользуемся подобием.



$$h=8$$

$$l=2\sqrt{2}$$

1.



Пифагор + КОЛПАК

$$d_0 = \sqrt{h^2 + l^2} = \sqrt{64 + 8} = \sqrt{72} = \sqrt{8 \cdot 9} = 2\sqrt{2} \cdot 3 = 6\sqrt{2}$$

2. Найдем  $r_0$

(т. Пифагора)

$$r_0^2 = (l + d_0)^2 + (r_0 - h)^2$$

$$r_0^2 = (2\sqrt{2} + 6\sqrt{2})^2 + (r_0 - 8)^2$$

$$r_0^2 = 64 \cdot 2 + r_0^2 - 16r_0 + 64$$

$$16r_0 = 3 \cdot 64$$

$$r_0 = 3 \cdot 4 = 12$$

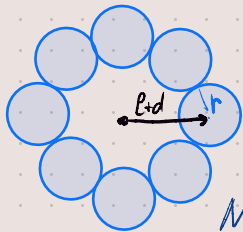
3. Найдем  $d$  для любого  $r$

$$\frac{d}{r} = \frac{d_0}{r_0}$$

$$d = \frac{d_0}{r_0} \cdot r =$$

$$= \frac{6\sqrt{2}}{12} r = \frac{\sqrt{2}}{2} r$$

③ В плоскости  
через центры  
маленьких шаров



$N$  окружностей

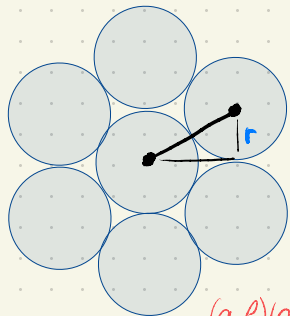
При каком радиусе  $r$

$N$  окружностей будут касаться,  
если их центры находятся  
на расстоянии  $l+d$  от центра круга?

$$l = 2\sqrt{2}$$

$$d = \frac{\sqrt{2}}{2} r$$

Решение для  $N=6$



$$l+d=2r$$

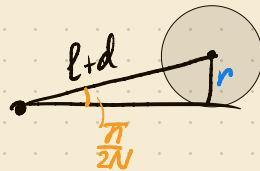
$$2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} r = 2r$$

$$r\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}$$

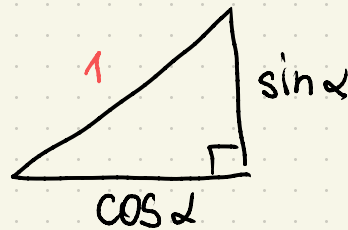
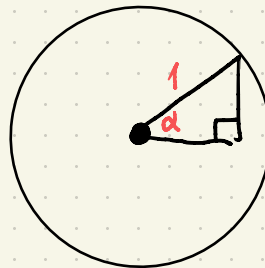
$$r = \frac{2\sqrt{2}}{2 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{4 - \sqrt{2}}$$

$$\frac{4\sqrt{2}(4+\sqrt{2})}{(4-\sqrt{2})(4+\sqrt{2})} = \frac{4\sqrt{2}(4+\sqrt{2})}{16-2} = \frac{4\sqrt{2}(4+\sqrt{2})}{14} = \frac{8\sqrt{2}+4}{7}$$

Для произвольного  $N$   
решение пишется через  $\cos \frac{\pi}{2N}$



$$\frac{r}{l+d} = \sin \frac{\pi}{2N}$$



4



В шесть утра воскресенья гусеница начала подниматься вверх по дереву. За день (с шести утра до шести вечера) она поднимается на высоту 5 метров, а за ночь (с шести вечера до шести утра) сползает на 2 метра вниз. В какой день и час она поднимется на высоту 9 метров, если двигается гусеница равномерно и прямолинейно?

Решение:

Вс, 6.00 :	0 м
18.00 :	5 м
Пн, 6.00 :	3 м
18.00 :	8 м
Вт, 6.00 :	6 м
? :	9 м
18.00 :	11 м

12 часов - 5 м  
 x часов - 3 м

$$\frac{x}{12} = \frac{3}{5}$$

$$x = \frac{12 \cdot 3}{5} = \frac{36}{5} = 7 \frac{1}{5} \text{ ч} = 7 \text{ ч } 12 \text{ м}$$

Ответ: гусеница доберётся к 13 ч. 12 м во вторник.

