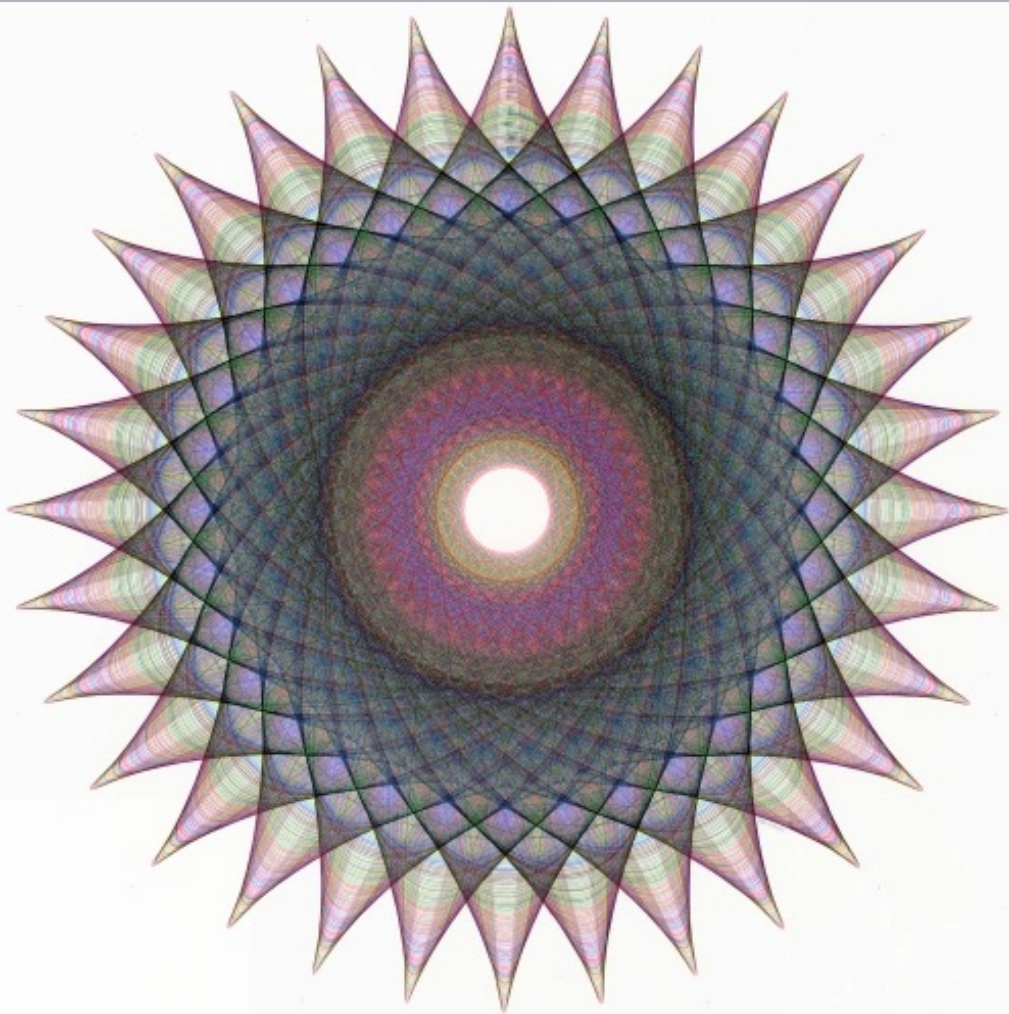


24

Вписанные
и описанные
многоугольники



"The Great Beyond"
By Mary Wagner

Диагональная разминка

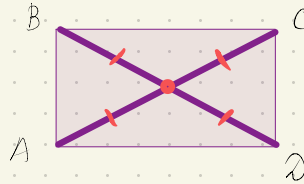
Дан четырёхугольник $ABCD$.

Что достаточно знать про его **диагонали**,

чтобы точно знать, что $ABCD$ - прямоугольник?

Наблюдение:

у прямоугольника диагонали равны
и делят друг друга пополам



Решение:

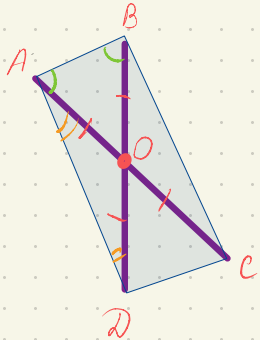
Докажем,
что этого
достаточно

Пусть $AC = BD$, $AC \cap BD = O$ - точка пересечения,
причем $AO = BO = CO = DO$

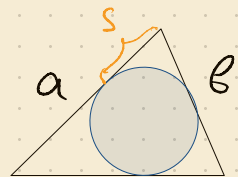
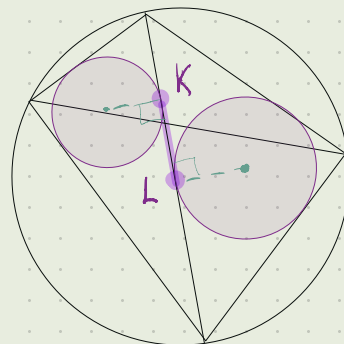
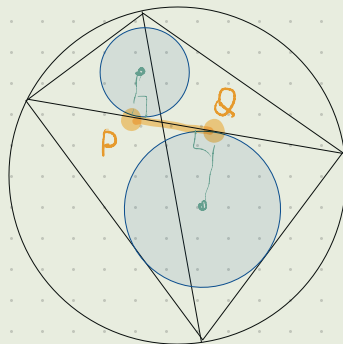
$$\angle OAB = \angle OBA = \frac{180^\circ - \angle AOB}{2} = 90^\circ - \frac{\angle AOB}{2}$$

$$\angle OAD = \angle ODA = \frac{180^\circ - \angle AOD}{2} = 90^\circ - \frac{\angle AOD}{2}$$

$$\begin{aligned} \angle DAB &= \angle OAD + \angle OAB = 90^\circ + 90^\circ - \frac{\angle AOD + \angle AOB}{2} = \\ &= 180^\circ - \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \end{aligned}$$



1 Докажите, что
 $PQ = KL$



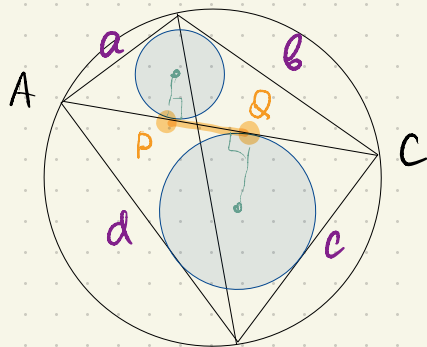
$$s = \frac{a+b-c}{2}$$

Решение:

Пусть $AC = l$

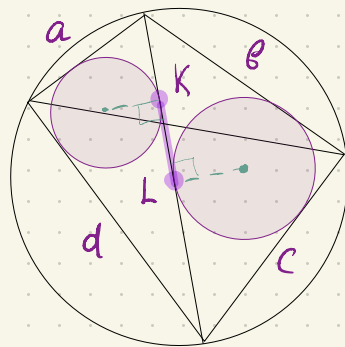
$$AP = \frac{a+l-b}{2}$$

$$AQ = \frac{d+l-c}{2}$$



Аналогично,

по симметрии

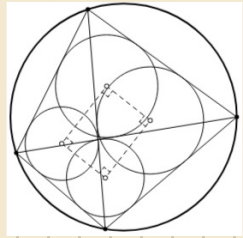
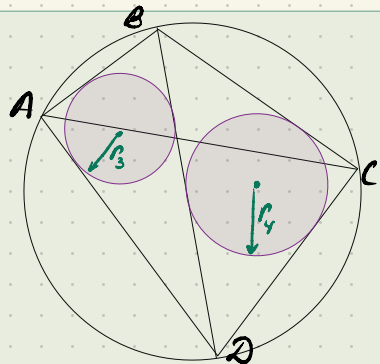
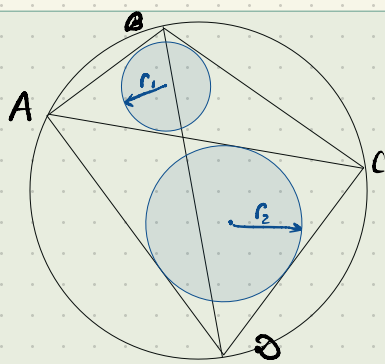


$$PQ = AQ - AP = \frac{d+l-c}{2} - \frac{a+l-b}{2} = \frac{b+d}{2} - \frac{a+c}{2}$$

$$KL = \frac{b+d}{2} - \frac{a+c}{2}$$

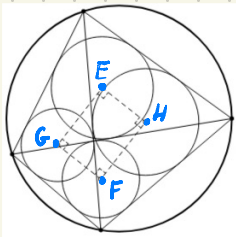
② Докажите, что

$$r_1 + r_2 = r_3 + r_4$$



Решение:

①

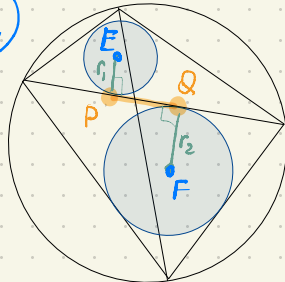


Т.к. EFGH —
прямоугольник,

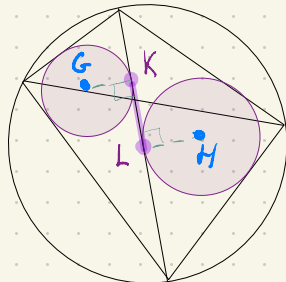
то

$$EF = GH$$

②

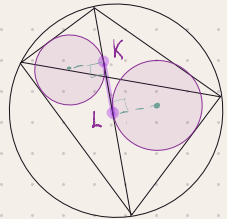


$$(r_1 + r_2)^2 + (PQ)^2 = (EF)^2$$

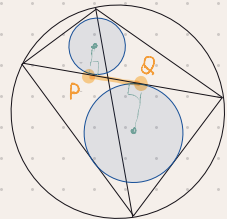


$$(r_3 + r_4)^2 + (KL)^2 = (GH)^2$$

Т.к. $EF = GH$ и $KL = PQ$, то $r_1 + r_2 = r_3 + r_4$.

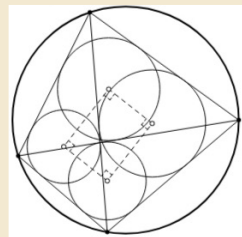
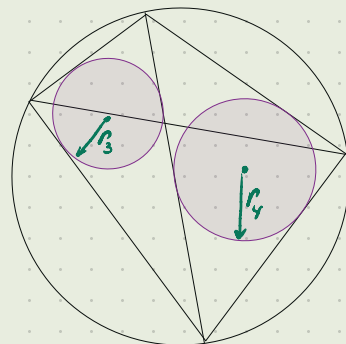
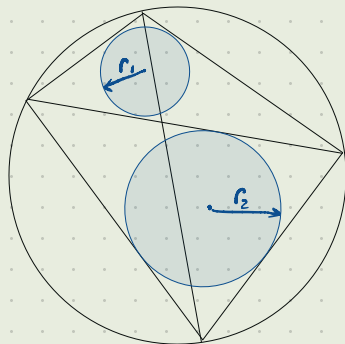


$$KL = PQ$$

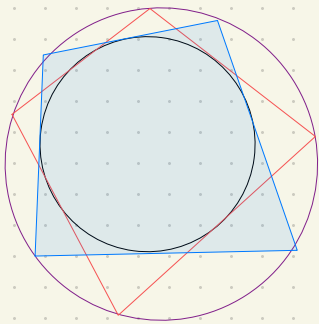


② Докажите, что

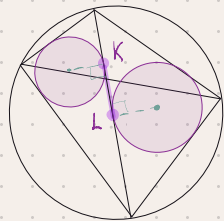
$$r_1 + r_2 = r_3 + r_4$$



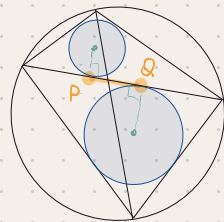
Замечание: пусть $ABCD$ - одновременно вписан и описан

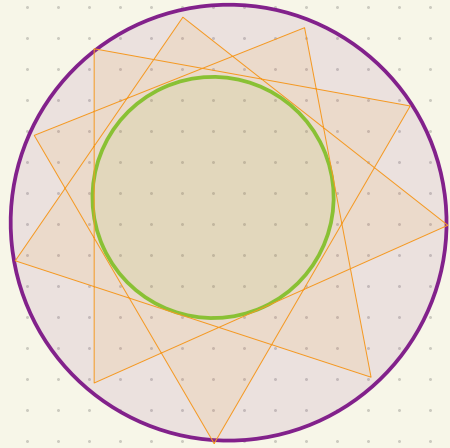


Тогда для фиксированных вписанной и описанной окружности величины $r_1 + r_2 = r_3 + r_4$ не зависят от выбора четырёхугольника.



$$KL = PQ$$





Поризм Понселе

Даны две окружности.

- Вписанно - описанная ломаная замкнется (или не замкнется) независимо от того, где её начать.
- Если замкнется, то число шатов го замкнутия тоже не зависит.



Жан-Виктор Понселе
1788 - 1867

(Зависит только от размера и расположения окружностей)

Четырёхугольники

Иерархия четырёхугольников

невыпуклые

Выпуклые

Трапеции

параллелограммы

прямоугольники

квадраты

ромбы

Нарисуйте множество

- вписанных четырёхугольников

- описанных четырёхугольников

